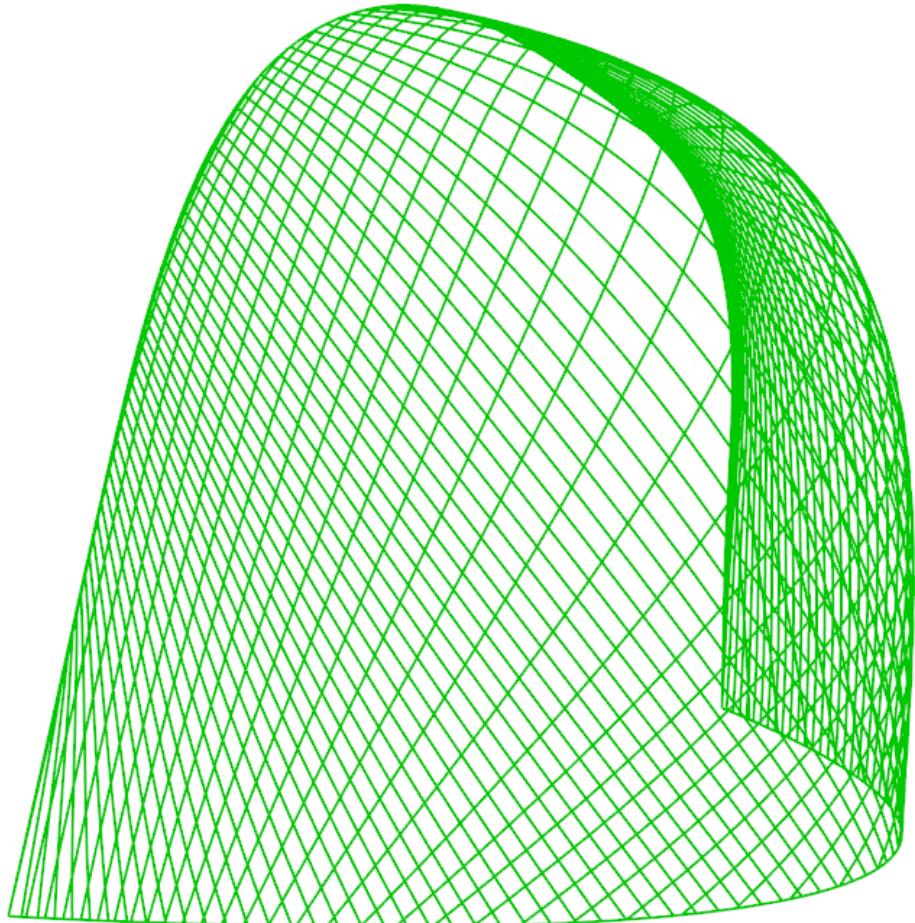


Réalisation technique des gridshells à partir de formes architecturales libres

En quoi l'utilisation des courbes géodésiques dans la réalisation de coques en gridshell est-elle pertinente pour la génération de formes architecturales prédéfinies.



Mémoire de fin d'études

RODRIGUES Thibaud

Ecole Nationale Supérieure d'Architecture Paris-La-Villette

Séminaire Savoir et Activités de Projet Instrumentées

ÉQUIPE ENCADRANTE

Séminaire CCA-S912 Savoirs des Activités de Projet Instrumentées (ENSAPLV)

Ce séminaire a pour objet l'étude des activités de conceptions architecturales contemporaines au moyen de nouveaux outils qu'elles convoquent. Dans ce mémoire nous avons réalisé l'ensemble des recherches autour de l'usage des courbes géodésiques dans leur utilisation potentielle en architecture au moyen de l'outil de programmation paramétrique *Grasshopper*. Cet outil a été le support de cette recherche scientifique.

Ce séminaire a également été l'occasion de convoquer deux domaines scientifiques distincts. Le premier est constitué par la recherche fondamentale autour des surfaces non euclidiennes d'où les courbes géodésiques sont issues. Le second domaine scientifique s'articule autour des techniques de construction et de la science des matériaux ce qui nous a permis d'étudier la faisabilité de l'utilisation ou non des courbes géodésiques.

Equipe encadrante : Monsieur Guéna François, Madame Tuscher Anne, Monsieur Silvestre Joaquim

RÉSUMÉ :

La technique constructive des gridshell, a participé à l'émergence de nouvelles formes architecturales dont la halle de Mannheim ou le gridshell de Downland qui ont marqué l'architecture par la mise au point de deux outils de conception. Le premier repose sur la technique dite du filet inversé permise par l'analogie entre les arcs et les câbles. La seconde consiste en la génération de maillages par la méthode dite du compas. Ces deux processus de conception des structures en gridshell sont limités à certaines formes architecturales de par leurs caractéristiques intrinsèques.

Ce mémoire étudie la possibilité de l'utilisation d'un nouvel outil issu des mathématiques théoriques, que sont les courbes géodésiques, afin de s'affranchir des limites des formes architecturales accessibles par les précédentes méthodes. En d'autres termes, l'objectif de ce mémoire est de montrer comment l'utilisation des courbes géodésiques peut-elle être une méthode universelle de génération de gridshell sur des formes imposées.

Pour répondre à cette problématique nous avons effectué une expérience sur une forme architecturale prédéfinie. Dans un premier temps nous avons limité le sujet à l'utilisation du matériau bois. Ensuite, au moyen de *Grasshopper*, nous avons généré ces courbes géodésiques sur une volumétrie imposée. Nous avons enfin procédé à plusieurs études de faisabilité technique de l'ouvrage structurel ainsi généré.

À l'issue des études de statiques de l'ouvrage nous avons pu conclure que l'usage des courbes géodésiques permet, de manière efficace, de générer des gridshells sur des formes architecturales imposées. Néanmoins, il apparaît que les limites de l'utilisation des courbes géodésiques proviennent de la difficulté à pouvoir anticiper les espacements de celles-ci à proximité d'une variation de courbure trop importante. Cependant, l'outil paramétrique a la faculté de pouvoir corriger cette faiblesse.

Malheureusement, nous n'avons pas pu comparer les performances structurelles entre un maillage généré à partir de géodésiques et celui basé sur la méthode des compas.

Mots clés : Gridshell, courbe géodésique, méthode des compas, maillage, structure bois, forme prédéfinie, dimensionnement

ABSTRACT :

Gridshell is a new constructive method based on a net of beam that enable to access at huge possibilities of architectural forms. Some of examples are famous like Mannheim's hall and Downland's museum due to the development of two designs tools. The first rests on inverted network thanks the similarity between arches and ropes. The second involves generating net by the method named "compass's method". Both process prevent gridshell's structure designing a network in a freeform owing to theirs features.

This thesis aims to the ability to use a new mathematics' object from theoretical studies named geodesical curves, to design a structural network in all of architectural form. In other terms, use of geodesical curves could be enable a new universal method of structural network generation on imposed architectural form ?

Repling to this question, we experimented this new method on a predefined architectural form. First of all, it's necessary to limit the subject of this research on a single material. We chose the wood for its properties. Then, thanks to Grasshopper, we generated geodesics curves on required form. Afterwards, we carried out several stability and ability studies.

This studies shown that using geodesical curves allow to generating efficiently structural gridshell on required architectural forms. Limitations of this use lies in the difficulties to control the spacing between geodesical curves close to significant curvatures' variations. However, the parametric tool gives the possibility to fix them correctively.

Unfortunately, we haven't compare structural performances between a network based on geodesic curves and the compass method.

Keywords : Gridshell, geodesic curve, compass method, network, wood structure, predefined form, design

Remerciements

Je tiens à remercier le laboratoire dans lequel j'ai pu réaliser ce mémoire. Je remercie les encadrants du séminaire « Savoir et Activités de Projet Instrumentées », Monsieur Guéna François, Madame Tuscher Anne et Monsieur Silvestre Joaquim de m'avoir offert une grande liberté dans mon choix de sujet d'étude afin que je puisse utiliser et approfondir mes connaissances en science des matériaux et les mettre à profit dans le cadre de la recherche en architecture.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Chaumont Henri pour son enseignement en Belgique durant mon échange Erasmus et dont la génération de la forme architecturale, support de ce mémoire, a été l'objet durant son cours.

Je remercie également Monsieur Leyral Marc, pour son enseignement de la construction bois et qui m'a permis d'obtenir les bases de compréhension du dimensionnement de ces structures.

Sommaire

ÉQUIPE ENCADRANTE	2
RESUME :.....	3
ABSTRACT :.....	4
REMERCIEMENTS	5
INTRODUCTION	8
1. DEFINITION ET EXEMPLES HISTORIQUES DE GRIDSHIELDS.....	11
1.1. Définition et caractéristique d'un gridshell.....	11
1.2. Aperçu historique des gridshells et méthodologies utilisées	15
1.2.1. Le gridshell de Vyksa 1897.....	15
1.2.2. Le gridshell de Mannheim	15
1.2.3. Moment fléchissant dans les structures en gridshell	16
1.2.4. Génération de la forme par la technique du filet inversé	18
1.2.5. Assemblage de la superstructure	20
1.2.6. Le gridshell du musée de Downland (2002)	20
1.2.7. Origine et définition d'un réseau de Tchebychev pour les maillages de surfaces imposées	22
1.2.8. Maillage de Tchebychev par la méthode des compas.....	23
1.2.9. Limites de la méthode du compas et du réseau de Tchebychev.....	24
1.2.10. Conclusion	25
2. PRESENTATION DU CAS D'ETUDE.....	26
2.1. présentation du maître d'ouvrage	26
2.2. Programme architectural.....	26
2.3. Naissance de la forme et implantation.....	27
3. CHOIX DU MATERIAU POUR L'ELABORATION DE GRIDSHIELDS.....	29
3.1. Principe de la méthode de Ashby.....	29
3.2. Caractéristique des gridshells au sens de Ashby	30
3.2.1. Indice I_1 : critère de courbure	30
3.2.2. Indice I_2 : critère de rigidité	30
3.2.3. Indice I_3 : indice de ténacité.....	31
3.2.4. Indice I_4 : contenu énergétique.....	31
3.2.5. Recherche du meilleur matériau	32
3.2.6. Conclusion du critère de Ashby	35
4. REALISATION DES MAILLAGES DES GRIDSHIELDS	36
4.1. Définition des courbes géodésiques sur une surface de \mathbb{R}^3	36
4.1.1. Première propriété : trajectoire la plus droite sur une surface.....	36
4.1.2. Deuxième propriété : distance la plus courte entre deux points	37
4.1.3. Espacement des courbes géodésiques	39
4.1. Réalisation d'un maillage de courbes géodésiques	40
4.2. Génération des épaisseurs du lattage	42
4.3. Intersection des lattages géodésiques et plan d'assemblage.....	43

4.3.1.	Génération des assemblages sur <i>Grasshopper</i>	43
4.3.2.	Choix d'un double lattage.....	45
4.3.3.	Avantage des assemblages avec le maillage géodésique	46
5.	DIMENSIONNEMENT DES ELEMENTS DU MAILLAGE	47
5.1.	Etude de la courbure de la coque.....	47
5.2.	Etude théorique de la courbure : Caractéristique de l'ELASTICA.....	48
5.2.1.	Courbure élastique	48
5.2.2.	Détermination de l'effort de courbure.....	52
5.3.	Détermination de la courbure élastique maximal admissible et la courbure critique	52
5.3.1.	Courbure élastique maximale selon l'Eurocode	52
5.3.2.	Courbure critique	54
5.3.3.	Force de contrainte lors de l'assemblage.....	55
6.	CALCUL DES EFFORTS DANS L'ENSEMBLE DU MAILLAGE.....	56
6.1.	Hypothèse et calcul du déplacement de la structure.....	56
6.2.	Analyse des résultats du déplacement de la structure	58
6.3.	Analyse de la répartition des efforts dans le gridshell à l'ELS	59
CONCLUSION		61
LISTE DES FIGURES		63
BIBLIOGRAPHIE		64

INTRODUCTION

Les formes courbes dans l'histoire de l'architecture sont apparues pour répondre à des besoins structurels et performanciels des ouvrages. En effet, les méthodes constructives ont évolué avec le temps, mais toujours en suivant les principes d'adaptabilité des formes et des matériaux tout en minimisant les efforts sur ceux-ci. C'est particulièrement le cas des efforts en flexion qui sont souvent ceux qui ont limité les possibilités techniques des structures et ouvrages architecturaux.

Ce sont les raisons pour lesquelles les architectes et ingénieurs ont cherché constamment à limiter ces efforts dans les structures afin d'améliorer les capacités résistantes de ces ouvrages. Cela s'est concrètement traduit par le développement des voûtes en arc, de plein cintre ou en ogive. Ces formes, qui sont apparues à l'Antiquité et qui se sont développées pleinement jusqu'au haut Moyen-âge limitent les efforts de flexion sur les structures.

À l'ère moderne, nous voyons le développement de nouvelles structures, les structures en gridshell.

Le gridshell est un terme anglophone qui regroupe l'ensemble des structures conçues à partir d'un maillage d'éléments. Le gridshell est donc, par définition, une discréétisation c'est à dire la reconstitution par des éléments de type poutres, d'une surface ou d'un volume. Cette typologie structurelle est fortement utilisée dans toutes les architectures de coque, pour réaliser généralement des toitures de grande portée.

Les réalisations des gridshells existantes sont le fruit de la conjonction de deux étapes de conception. La première, la méthode du filet inversé, définit la volumétrie générale de la structure. Son intérêt est d'engendrer essentiellement des efforts de compression et de traction sur la structure. Cependant cette méthode limite grandement les possibilités formelles offertes au concepteur.

La seconde étape consiste en la création du maillage du réseau de poutres. Historiquement, ces réseaux étaient réalisés au moyen d'une méthode appelée méthode des compas, consistant à pavier une surface de parallélogrammes gauches. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est purement géométrique.

La problématique de ce mémoire est d'identifier un outil de conception permettant de réaliser des gridshells qui soient structurellement viables et applicables sur l'ensemble des formes architecturales prédéfinies.

Ce mémoire propose d'étudier la pertinence d'une méthode basée sur un concept issu de la géométrie non euclidienne : les courbes géodésiques. Nous nous interrogerons donc sur la pertinence d'un maillage utilisant les courbes géodésiques pour la génération de gridshells.

La première partie de ce mémoire sera donc consacrée à la définition de ce qu'est un gridshell en comparaison avec les autres typologies structurelles existantes telles que les poutres, dalles, ou encore les membranes. Puis nous explicitons l'intérêt que peut avoir cette typologie de structure vis-à-vis de la minimisation des efforts en flexion et des performances qu'elle offre.

Nous nous intéresserons à la genèse du gridshell dans l'histoire de l'architecture en faisant des focus sur quelques réalisations remarquables comme le gridshell de Vyska de l'ingénieur Russe Shukhov ou encore celui de Mannheim conçu par Frei Otto. Tous ces exemples historiques utilisent une méthodologie particulière de génération du gridshell reposant sur la recherche d'une forme s'approchant le plus possible d'un arc funiculaire. Il s'agit d'une forme géométrique particulière soumise seulement à des efforts de compression. Cependant, cette méthode limite de manière conséquente les formes architecturales que peuvent prendre les gridshells.

Dans une seconde partie, nous présenterons donc notre cas étude qui se trouve être un assemblage de trois coques qui sont issues d'un projet architectural réalisé dans le cadre d'un échange en Belgique.

Nous poursuivrons dans une troisième partie par le choix du matériau avec lequel nous concevrons notre gridshell. Nous verrons que la sélection du matériau le plus approprié pour notre cas d'étude, ne dépend pas de la méthode de conception du gridshell mais de la typologie de la structure. Elle dépend d'un ensemble de facteurs. Nous suivrons la Méthode d'Ashby qui prend en considération l'ensemble de ces facteurs. Ainsi, nous choisirons le bois comme matériau structurel.

Par la suite, nous explicitons la méthode relative à la création de maillage et la définition d'un réseau de Tchebychev par la méthode dite des compas avec une attention toute particulière sur le gridshell de Mannheim. Nous tenterons une critique de cette méthode avec la définition des axes d'amélioration qui peuvent être apportés. Ainsi, nous expliquerons en quoi l'utilisation des courbes géodésiques peut s'avérer pertinente. Celles-ci peuvent être définies de manière succincte comme la généralisation des droites dans un espace courbe. Nous expliquerons la méthode utilisée pour appliquer ce concept à nos volumes prédéfinis.

La dernière partie de ce mémoire sera consacrée à une étude de la faisabilité constructive de ce nouveau maillage. Nous nous attacherons à dimensionner les différents éléments bois constitutifs

du maillage en fonction de la courbure de chacun de ses éléments. Nous définirons et étudierons la courbure maximale autorisée par les normes françaises, ainsi que les efforts de précontraintes dus aux assemblages de la structure. À partir de ces différentes données nous conclurons par une étude de la déformation et des efforts sous des charges de poids propre et de vent de la structure.

1. DEFINITION ET EXEMPLES HISTORIQUES DE GRIDSHELLS

Dans cette partie, nous chercherons à définir de manière succincte et imagée les principales caractéristiques d'un gridshell qui viennent de la capacité de ces structures à travailler essentiellement suivant des efforts axiaux. Nous replacerons le gridshell dans le contexte général des différentes typologies de structures existantes. Puis nous analyserons quelques gridshells qui nous permettront de construire notre base de référence pour la suite de notre étude.

1.1. DEFINITION ET CARACTERISTIQUE D'UN GRIDSHELL

Le mot gridshell nous vient de l'anglais et n'a pas de véritable équivalent en français. Ce mot est la fusion de deux termes. « *Grid* » signifie maillage ou treillis et le mot « *shell* » coque. Ce terme regroupe l'ensemble des coques dont la surface est construite sur la base d'un maillage structurel discontinu.

Dans son ouvrage, Schlaich [20] nous propose trois grandes catégories de structures reposant sur des principes d'équilibre des efforts différents. Parmi ces catégories se trouvent les structures en gridshells, les dômes et les coques. Ces structures ont la particularité que lorsqu'elles sont soumises à une charge, la transmission des efforts internes sont principalement des efforts de compression. La seconde typologie de structures sont les structures travaillant en flexion. Cette typologie regroupe les poutres et les dalles. La dernière typologie se trouve être les structures tendues et les membranes qui reprennent les charges qui leur sont appliquées par des efforts en tension.

L'étude des gridshells a connu un véritable essor dans les années 1960 lorsque Frei Otto, Edmund Happold de *l'Institut für leichte Flächentragwerke* [16] de Stuttgart ont commencé à développer ce système structurel qu'ils appliqueront ensuite pour la création du pavillon de Mannheim en 1974. Edmund Happold définit le gridshell comme « une surface doublement courbée

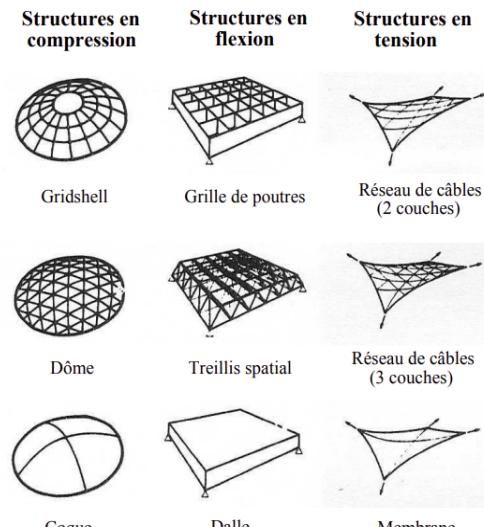


Figure 1 : Classification des typologies de structures (Schlaich [20])

formée d'un maillage de poutres assemblées qui possède un degré de liberté en cisaillement ». Nous pouvons expliciter encore davantage cette définition en indiquant que le principe constructif d'un gridshell repose sur une grille plane générée à partir de deux directions de poutres articulées au niveau de leurs points de rencontre.

En phase de réalisation, cette structure plane est construite au sol. Ensuite, par déformation élastique du réseau de la grille en phase construction, on obtient la forme structurelle voulue. Une fois la forme finale obtenue, celle-ci est ancrée au sol au moyen d'un dispositif spécifique. Puis, un système de contreventement est mis en place pour assurer la stabilité de l'ouvrage.

La distinction entre les structures en gridshell ou en dôme géodésique et les structures en coque (figure 2&3) vient de la continuité ou non des volumes structurels. En effet, les ouvrages en coque sont continus ce qui implique que sous un chargement quelconque, les efforts se divisent entre des efforts normaux et des efforts tranchants (ou cisaillement). Fondamentalement, cela signifie qu'une coque continue peut d'elle-même se contreventer. Les gridshells et les dômes géodésiques sont quant à eux intrinsèquement discontinus. De plus, les assemblages des éléments poutres du maillage sont rotulés c'est-à-dire qu'il reste un degré de liberté en rotation entre ces éléments. Par conséquent, ce maillage ne peut alors transmettre que des efforts normaux le long de ces éléments. Le contreventement peut être assuré par le blocage de ce degré de liberté en rotation par l'ajout d'un maillage supplémentaire concourant au niveau des rotules. Il peut être réalisé par un réseau de poutres qui ne sont pas parallèles à celles constituant le premier maillage ou bien, par l'ajout de câbles métalliques sur les diagonales des parallélogrammes du premier maillage.

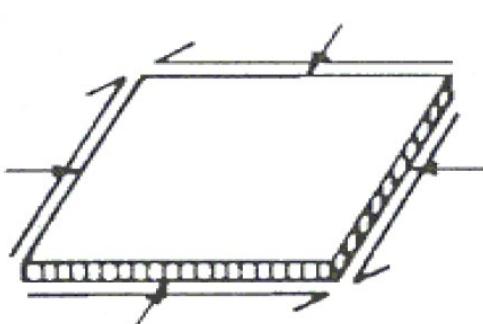


Figure 2 : Répartition des efforts de cisaillement et normaux (Burkhardt 1978 [5])

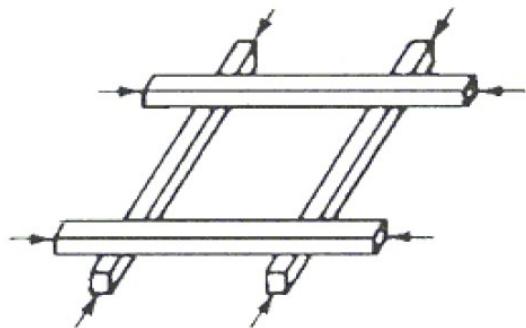


Figure 3 : Répartition des efforts normaux dans un maillage (Burkhardt 1978 [5])

Une fois le contreventement d'un gridshell réalisé, on peut considérer celui-ci comme la discréétisation en barres d'une coque.

La différence entre les dômes géodésiques et les gridshells réside dans le fait que les dômes géodésiques sont basés sur la répétition d'une maille géométrique unique (figure 4). Nous devons la première réalisation d'un dôme géodésique à l'Américain Richard Buckminster Fuller sur l'île Saint-Hélène de Montréal en 1967. Nous remarquons que cette structure sphérique est constituée de la répétition d'un même triangle équilatéral. Les constructions des dômes géodésiques peuvent également faire appel à d'autres formes géométriques comme des hexaèdres. En ce qui concerne la halle de Frei Otto (figure 5), la surface est bien une surface à double courbure mais le maillage est construit à partir de parallélogrammes dont les dimensions sont fluctuantes en fonction de la courbure.

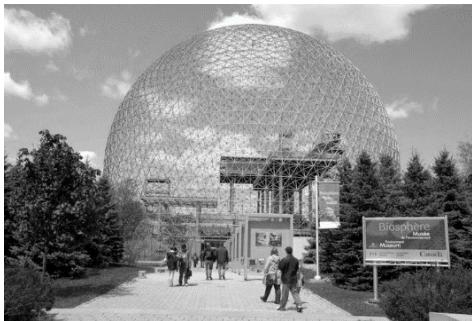


Figure 4 : Dôme de Buckminster Fuller



Figure 5 : Hall de Frei Otto à Mannheim

Afin de se donner quelques outils comparatifs génériques entre les différentes structures dont nous avons fait le descriptif, la figure 6 représente un diagramme charge / déformation pour les trois types de structures suivantes : les gridshells, les coques continues et les structures en tension par câbles.

Nous constatons, au moyen de ce diagramme, que les structures travaillant essentiellement en compression comme les gridshells et les coques continues, perdent leur rigidité à partir d'une certaine charge critique. Ce qui signifie qu'une petite déformation supplémentaire aux alentours de cette charge critique, causera la rupture de l'ouvrage.

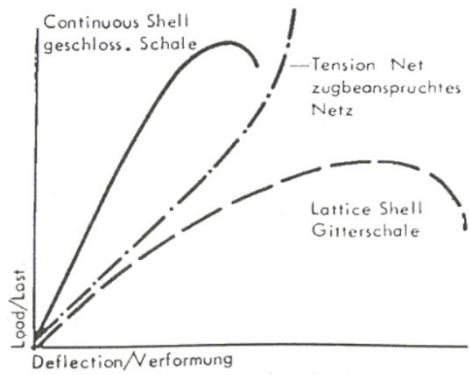


Figure 6 : Diagramme charge/déformation (Burkhardt 1978 [5])

Nous remarquons cependant que les structures en gridshell possèdent une zone « critique » bien plus étendue que les coques, le risque de rupture sera donc plus facile à anticiper contrairement aux coques. La charge critique que peut supporter une structure en coque est supérieure à une structure en gridshell. Cela vient du fait que les efforts normaux peuvent se répartir sur l'ensemble de la surface de la coque ce qui conduit à une charge ultime plus élevée même si ce propos pourrait être nuancé.

Au regard de cette analyse entre gridshell et coque, nous pourrions conclure que les performances structurelles des gridshells ne présentent pas d'intérêt. Cependant, ils permettent la réalisation de couvertures de moyenne à grande portée tout comme les coques béton mais ils bénéficient d'une mise en œuvre plus « aisée » car ne nécessitent pas la création d'un moule pour le coulage du béton. De plus, les gridshells restent des structures légères avec un ratio résistance/quantité de matériaux très avantageux par rapport aux coques. Cela se traduit par un coût des matières premières réduit sur le coût total d'un projet et par un impact environnemental faible en comparaison des autres méthodes constructives.

1.2. APERÇU HISTORIQUE DES GRIDSHELLS ET METHODOLOGIES UTILISEES

1.2.1. Le gridshell de Vyksa 1897

Nous devons la première structure en gridshell de l'Histoire à l'ingénieur et architecte russe Vladimir Shukhov (Beckh and Barthel [3]). C'est en 1897, soit soixante ans avant les théories mentionnées précédemment et élaborées par Frei Otto que Vladimir Shukhov conçoit une halle de production pour une industrie sidérurgique dans la ville de Vyksa près de la Volga en Russie (figures 7 et 8). Cet ouvrage d'une superficie de 73m sur 38,40m s'articule autour de cinq baies séparées entre elles par quatre arcs en treillis. Dans le sens longitudinal, la structure est stabilisée par des consoles en façade reliées aux arcs par des tirants. La théorie des gridshells n'existe pas à cette époque et nous n'avons pas de trace historique de la méthodologie constructive et conceptuelle utilisée ici.



Figure 7 : Vue extérieure de la structure en gridshell de Vyksa (1897)



Figure 8 : Vue intérieure du hall en 2007

De nos jours, ce bâtiment est en état de délabrement avancé mais la superstructure reste encore visible. Il est probable que Vladimir Shukhov ait utilisé la technique dit du filet inversé pour obtenir la forme globale de cet ouvrage. Nous verrons par la suite, dans le cas du gridshell de Mannheim une application concrète de cette technique.

1.2.2. Le gridshell de Mannheim

La halle de Mannheim est un ouvrage d'une superficie de 3 600m² avec une portée maximale de 85m. C'est la première fois qu'un gridshell est dimensionné avec une aussi grande portée et sur une surface aussi importante. Dans un premier temps, les architectes ont déterminé la dimension des surfaces nécessaires pour accueillir le programme demandé par la municipalité. Une fois cela fait les contours du gridshell ont été définis. L'établissement des contours est primordial dans cette typologie de projet à la fois pour déterminer les accès de l'ouvrage aux usagers mais également car

il détermine les conditions aux limites de la superstructure. La figure 9 résume sur un plan, les différentes typologies de conditions aux limites.

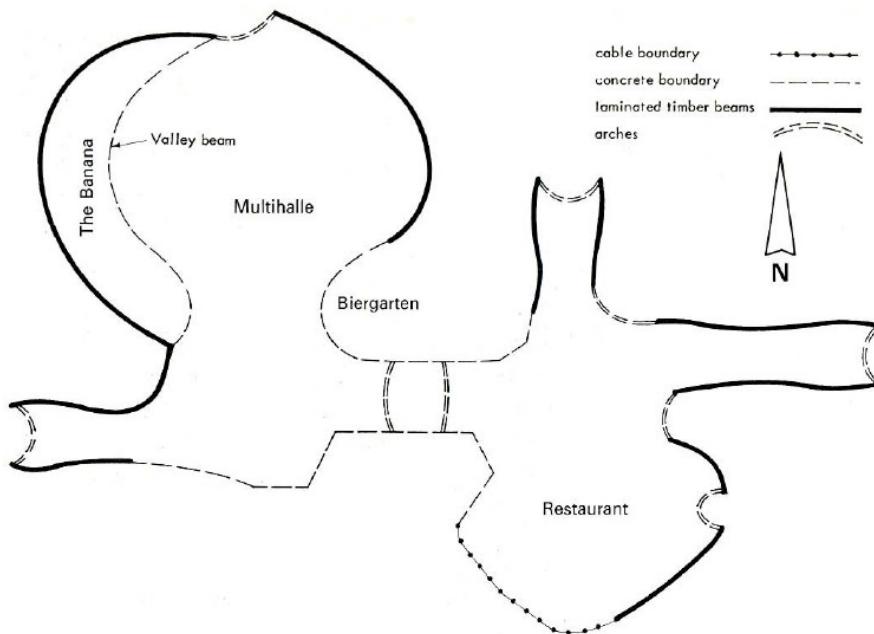


Figure 9 : Plan de la halle de Mannheim avec les typologies de conditions aux limites

Ces contours sont de quatre typologies différentes : les fondations en béton, les câbles en tension, les poutres lamellées collées en bois et les arches en bois. La génération de la forme de la halle de Mannheim nous vient de l'étude de la maquette inversée et de la bonne compréhension de ce qu'est le moment fléchissant dans une structure.

1.2.3. Moment fléchissant dans les structures en gridshell

Nous l'avons dit précédemment dans la partie consacrée à la définition du gridshell, il s'agit de structure soumise principalement à des efforts de compression. Cependant il ne s'agit pas d'une propriété intrinsèque au gridshell. Il s'agit d'une propriété géométrique qu'ont certains ouvrages de travailler exclusivement en compression. C'est le cas des arcs funiculaires. Par conséquent, afin de limiter les efforts dus à la flexion, il est important de comprendre comment apparaissent ces efforts lorsqu'une structure est soumise à des charges. Prenons l'exemple d'un arc soumis à une charge continue comme son poids propre et un câble ne possédant aucune rigidité en flexion soumis à son propre poids (figure 10).

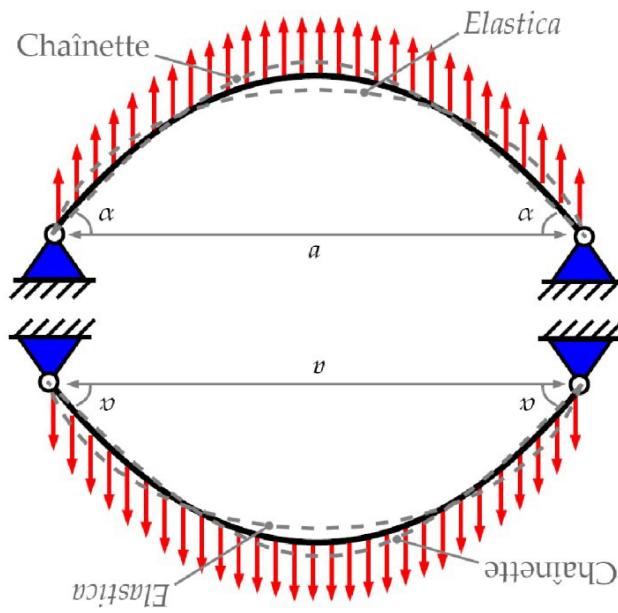


Figure 10 : Déformation d'un arc et d'un câble suivant une charge répartie [13]

Les câbles prennent naturellement des géométries telles que seul l'effort normal (traction) subsiste. Par analogie, le collier autour du cou résiste lorsqu'on tire sur la chaîne (effort de traction) mais se tord en restant flexible lorsqu'on le manipule (aucune raideur en flexion).¹

Pour que l'arc soit soumis uniquement aux efforts de compression (opposés à ceux de traction), il doit avoir la forme miroir à celle d'un câble de même portée et soumis aux mêmes charges. Plus la forme de l'arc s'éloigne du câble miroir, plus des efforts en flexion apparaissent. La technique de génération de ces formes qui repose sur l'analogie arc – câble porte le nom de méthode des filets inversés.

¹ La différence entre la courbe « chaînette » et « Elastica » correspond à la prise en compte ou non de la rigidité en flexion du câble. Typiquement un câble d'un important diamètre possède une rigidité en flexion non négligeable et se rapprochera de la courbe « Elastica ».

1.2.4. Génération de la forme par la technique du filet inversé

La technique du filet inversé est utilisée par des architectes à la fin du XIXème siècle comme Antoni Gaudí, pour l'élaboration des plans de la basilique de la Sagrada Familia de Barcelone (figures 11 et 12).



Figure 11 : Maquette en filet inversé de la Sagrada Familia



Figure 12 : Filet inversé de la Sagrada Familia

Cette technique consiste à établir le dessin des structures courbes à partir du négatif de chainettes chargées. Le dessin ainsi obtenu, donne la forme géométrique optimale permettant la plus grande résistance aux charges appliquées. En effet, l'élaboration de courbes en chaînette (équation du 4ème degré d'une courbe) permet de s'affranchir totalement des efforts en flexion au sein de la structure.

Le contour ou rive de la halle de Mannheim se trouve être l'élément « fixe » de la structure en gridshell et sert de support au filet inversé. L'élaboration de la géométrie gridshell nous vient dans un premier temps de l'étude de la maquette inversée du projet. Une fois cette maquette établie (figures 13 et 14), la géométrie de celle-ci a été mesurée par photogrammétrie pour obtenir les coordonnées de chacun des nœuds du maillage. L'étude de cette maquette a l'intérêt de définir l'enveloppe extérieure du bâtiment. Le second travail réalisé a consisté en l'évaluation des efforts s'appliquant sur cette structure. En ce qui concerne les efforts au vent, ceux-ci ont été évalués par mesure en soufflerie du fait de la forme si particulière de l'ouvrage. Les hypothèses que retiennent les ingénieurs sont de 40kg/m^2 pour la neige et de 20kg/m^2 pour le poids propre de la structure et de la couverture. Le choix de l'essence de bois s'est porté sur du pruche de l'ouest (*tsuga heterophylla*).

Il s'agit d'une essence endémique de l'Ouest américain qui a la faculté d'atteindre des hauteurs conséquentes jusqu'à plus de 60 mètres avec des troncs droits de section variant entre 1,5 et 2m de diamètre. Après analyse mécanique de cette essence (influence de l'humidité, résistance à la rupture,

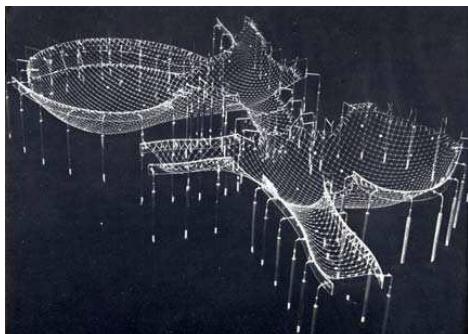


Figure 13 : Maquette inversé de la Halle de Mannheim prise par photométrie

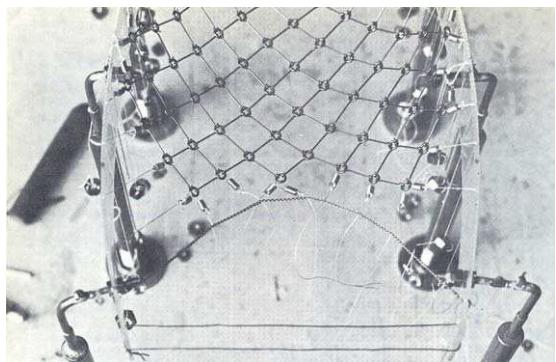


Figure 14 : Détail de la maquette inversé de la halle de Mannheim

module d'Young etc...) et l'étude de la courbure générale de l'ouvrage, la section maximale des composants du gridshell ne pouvait dépasser 50x50mm.

Tous ces éléments évoqués précédemment permettent de commencer les études de stabilité. L'analyse numérique des résultats issus de la photogrammétrie a révélé que certaines zones de l'ouvrage ne travaillaient pas en traction ou en compression du fait des imprécisions de la maquette ainsi que de l'outil de mesure. Les ingénieurs ont calculé la nouvelle géométrie de la structure en utilisant la méthode de la densité de force² afin de pallier ses imprécisions.

² La méthode des forces mentionnée est une méthode calculatoire implémentable numériquement assimilant chaque barre à des câbles supposés tendus sans raideur en flexion. L'équation d'équilibre au niveau de chaque nœud est fortement non linéaire. Pour pouvoir effectuer le calcul on applique des coefficients « densité de force » supposés connus rendant le système d'équations linéaire. La théorie mathématique de résolution de ce problème a été développée par H. Schek et K. Linkwitz [14] et [19]

1.2.5. Assemblage de la superstructure

La construction du gridshell de Mannheim devait initialement se réaliser au moyen de système de levage. Après étude de la faisabilité de cette solution, il est apparu que quatre grues de deux-cents tonnes étaient nécessaires. L'entreprise en charge de la construction de ce gridshell, face



Figure 15 : Photographie du chantier de construction du gridshell de Mannheim

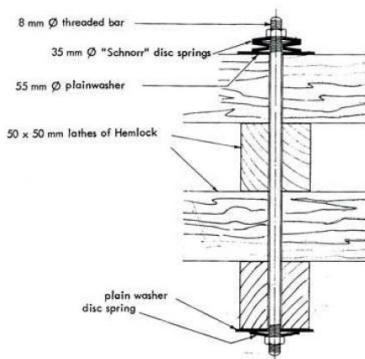


Figure 16 : Représentation du système d'assemblage du gridshell de Mannheim

au coût élevé que cela représentait, a préféré utiliser des échafaudages fixes sur des emplacements bien spécifiques le temps de la mise en place du gridshell (figure 15). Afin de garantir une bonne répartition des charges le temps du montage du gridshell, des éléments en bois en forme de H ont été utilisés (figure 15). Les assemblages du gridshell de Mannheim ont été réalisés au moyen de supports temporaires au sol. Ces assemblages sont constitués de quatre couches de lattages bois liaisonnées par un système de boulonnage traversant l'ensemble des couches du gridshell (figure 16).

1.2.6. Le gridshell du musée de Downland (2002)

Il s'agit d'un ouvrage que l'on doit à la collaboration entre Edxard Cullinan Architects et les ingénieurs de Buro Happold. Cet ouvrage se situe dans le sud de l'Angleterre dans la région du Sussex. Ce gridshell est une couverture pour le centre international pour l'étude et la conservation de la charpente en bois des bâtiments historiques. L'objectif était donc d'accueillir un vaste espace central, d'une hauteur importante. Le second objectif était également que le public puisse assister à ces chantiers de restauration. L'utilisation du bois a été une évidence pour les concepteurs et la réalisation d'un gridshell leur est apparue naturelle pour pouvoir franchir facilement des portées importantes tout en étant dans l'économie de matière.

Le programme architectural se compose d'une coque résultant de l'assemblage de trois dômes au-dessus d'une emprise rectangulaire au rez-de-chaussée. Cette structure de coque s'étale sur 50 m de longueur, entre 11 à 16m de largeur et de 7 à 11m de hauteur [10]. Ce projet a fait l'objet de maquette d'étude assez poussée à la manière du gridshell de Mannheim afin d'en déterminer la forme. Il s'agit de la méthode des filets inversés qui a été une nouvelle fois utilisée en phase maquette. Une fois la forme globalement figée, les concepteurs ont pu établir les conditions aux limites de la structure afin de réaliser de nouvelles itérations pour la recherche de forme mais cette fois-ci à l'aide d'un logiciel spécifique. Ce logiciel est le fruit du travail de recherches de Chris Williams de l'Université de Bath. Ce programme informatique est construit autour de la méthode de relaxation dynamique³ [2]. Ce programme et cette méthode numérique ont permis au concepteur de s'éloigner de la forme funiculaire des filets inversés de la maquette. R.Harris et J.Romer [10] expliquent dans leur ouvrage que pour générer la forme, Williams a tenu compte de la résistance en flexion des



Figure 17 : Photographie du gridshell de Downland en construction [10]



Figure 18 : Vue intérieur du musée de Downland [10]

poutres en bois ce qui a permis de s'éloigner du système constructif décrit plutôt où les gridshells travaillent exclusivement en traction ou compression. R.Harris [7] explique également dans un second ouvrage, le principe constructif du gridshell de Downland. Le maillage bois n'a pas été construit au sol dans le cas du musée de Downland mais sur une structure en échafaudage (figure 17). Ce choix a été fait pour deux raisons : la première pour des questions de poids de la grille à soulever, la seconde pour des raisons géométriques, les formes que doit suivre le lattage auraient été plus difficiles à obtenir par déformation à posteriori d'une grille.

³ La méthode de relaxation dynamique est une technique qui suppose que la masse d'un système est répartie au niveau de ses noeuds. Le système oscille autour de sa position d'équilibre sous l'influence de son chargement. Il s'agit d'un processus itératif simulant un comportement pseudo-dynamique dans le temps.

D'un point de vue des assemblages constructifs, le procédé reste similaire à celui de Mannheim. Dans le cas du musée, l'assemblage des quatre lattes de bois se fait par l'intermédiaire de trois plaques boulonnées enserrant les maillages (figure 18).

1.2.7. Origine et définition d'un réseau de Tchebychev pour les maillages de surfaces imposées

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la façon de mailler une coque en partant d'une forme imposée comme c'est le cas dans les exemples précédents. Dans les cas historiques que nous avons étudiés précédemment, les maillages ont été générés en utilisant une méthode mise en place par Frei Otto issue des travaux du mathématicien russe Tchebychev.

L'objectif de cette partie est d'analyser cette méthode et d'en établir les limites.

Tchebychev lors d'une mission pour l'armée, s'est intéressé à l'optimisation des découpes des uniformes, pour réduire les chutes de tissus [12]. En effet, les pertes de tissus lors de la confection des découpes de ces vêtements sont particulièrement importantes surtout au niveau des épaules comparativement à la surface de peau à couvrir. Le problème tel qu'il le définit dans sa conférence consacrée à ce sujet en 1878 [21] est le suivant : « Comment habiller une surface quelconque avec un tissu ? »

Tchebychev considère qu'un tissu posé sur une surface plane est formé d'un maillage de fils rectilignes entrecroisés et perpendiculaires. Ce maillage forme une surface composée de minuscules carrés tous identiques. Lorsque le tissu est déposé sur une surface quelconque celui-ci va alors se déformer, les fils composant ce maillage deviennent des courbes gauches. Les carrés initiaux se déforment pour donner des parallélogrammes. L'ensemble de la théorie de Tchebychev revient à trouver des systèmes de coordonnées tels qu'il est possible d'obtenir un maillage unique sur des surfaces. C'est-à-dire obtenir le recouvrement de n'importe quelle surface à partir du cisaillement d'un maillage plan régulier.

Tchebychev a démontré que toute surface admet localement en tout point un réseau avec cette propriété mais que l'existence globale de ce type de coordonnées n'est possible que sur un ensemble restreint de surfaces. Concrètement les surfaces possédant des singularités avec des bosses, des variations de courbures très brusques, ne permettent pas d'obtenir un système de coordonnées de Tchebychev uniforme sur l'ensemble de la surface.

1.2.8. Maillage de Tchebychev par la méthode des compas

Frei Otto dans son ouvrage [2] s'inspire des travaux de Tchebychev pour la réalisation de son maillage de la halle de Mannheim. Pour rappel, la forme de cette halle nous vient de l'étude d'un modèle funiculaire par la méthode des filets. Par conséquent, Frei Otto n'a pas été confronté à des problèmes de singularités dus à la géométrie de la surface. Il est donc possible de trouver un système de coordonnées permettant de décrire la déformation d'un maillage plan sur la forme finale de la halle. Frei Otto a procédé à l'élaboration d'une méthode géométrique pour l'obtention d'un maillage : la méthode du compas. Elle est décrite par Cyril Dourthe [6] d'après les travaux de Frei Otto.

La première étape de la méthode dite du compas, consiste aux tracés de deux lignes non parallèles quelconques que l'on nomme directrices (figure 19). Ces lignes doivent se croiser en un

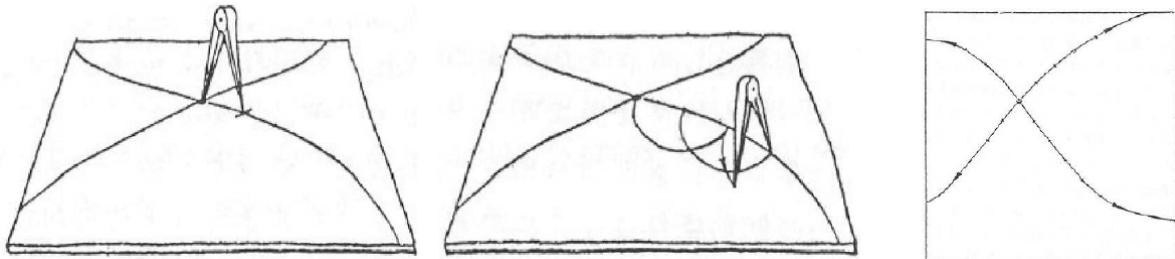


Figure 19 : Construction des lignes directrices par la méthode des compas [20]

point et si possible ne pas posséder de variation brusque de courbure. Une fois ces lignes choisies nous procédons à leur subdivision au moyen d'un compas afin que les subdivisions soient de distance identique. Ensuite, à partir des deux points les plus proches de l'intersection des directrices, on construit au compas un nouveau point à égale distance de ces deux points. Les deux points précédents auxquels on ajoute le point nouvellement créé et le point d'intersection des directrices forment un parallélogramme (figure 20).

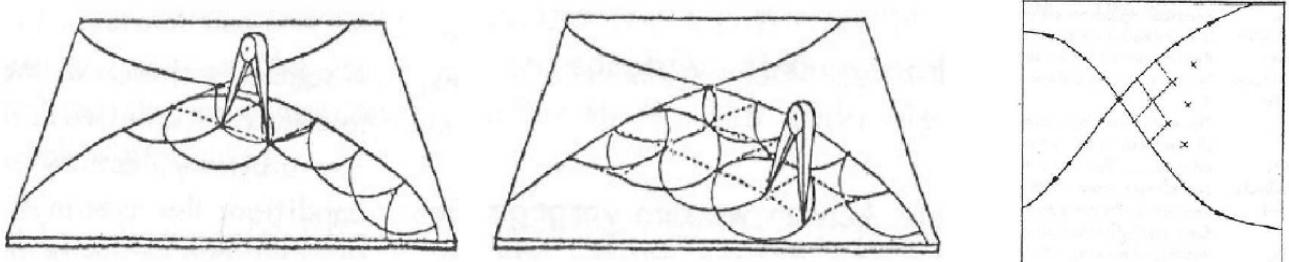


Figure 20 : Elaboration du maillage de proche en proche [20]

Le processus est considéré comme achevé à partir du moment où la surface à discréteriser est recouverte par des parallélogrammes. L'exemple que nous avons pris s'attache à construire un maillage sur une surface en deux dimensions plane mais le procédé est analogue sur des surfaces non planes quelconques. Pour plus de clarté, nous proposons une illustration de ce procédé sur la figure 21 issue des travaux de C. Douthe [6]. Elle montre le procédé d'un maillage par la méthode des compas sur une sphère.

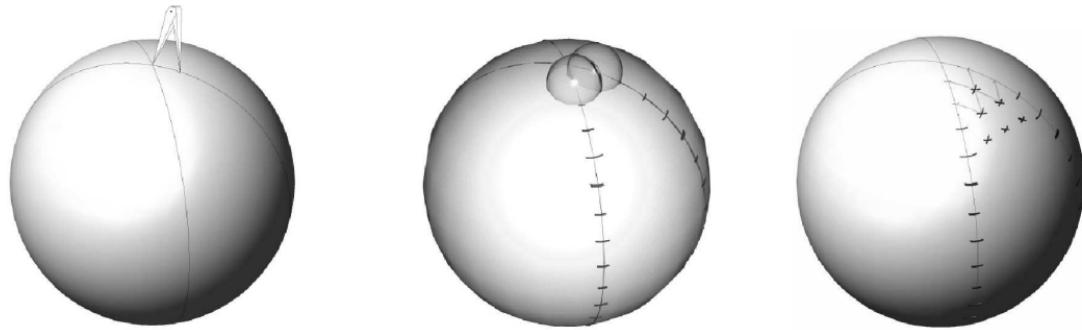


Figure 21 : Elaboration d'un maillage par la méthode des compas sur une sphère [15]

1.2.9. Limites de la méthode du compas et du réseau de Tchebychev

Le réseau de Tchebychev est une façon géométrique simple de pouvoir discréteriser une surface. Cette technique peut donc être assez facilement implantée dans un logiciel paramétrique comme *Grasshopper*. Cependant, nous avons vu précédemment que l'existence d'un maillage de Tchebychev n'est pas garantie sur l'ensemble des surfaces. Les travaux de Hopf [11] en 1983 ont montré que pour n'importe quelle topologie c'est-à-dire surface, un réseau de Tchebychev existe si le total de la courbure de la surface est supérieur au double de pi. C'est-à-dire si :

$$|\iint K \, dS| \geq 2\pi$$

Avec K l'inverse du rayon de courbure que nous définirons plus précisément par la suite de notre étude et S la surface considérée. Par conséquent, si cette condition n'est pas réalisée, il est nécessaire d'introduire des singularités qui doivent être traitées par différents procédés mathématiques et techniques spécifiques suivant leurs natures ou bien par des discontinuités. C'est notamment le cas dans la halle de Mannheim au niveau de la jonction entre la halle principale et le restaurant. Cette discontinuité est traitée au moyen de deux arches.

Le second inconvénient de la méthode du compas est qu'il s'agit d'une méthode purement géométrique qui ne tient pas compte de la raideur en flexion des éléments barres. En effet, dans le

cas où le maillage est réalisé en plan, les barres constituant la structure sont initialement droites ce qui induit d'importantes forces de précontrainte lors de la mise en place de la forme définitive et de l'application des conditions aux limites. Par conséquent, ces forces de précontrainte appliquées sur la structure doivent être calculées afin de ne pas causer la ruine de celle-ci.

Cette méthode nécessite également une attention toute particulière concernant le passage du modèle filaire au modèle de barres en trois dimensions. C'est-à-dire que cette méthode ne garantit pas intrinsèquement que les barres se situent dans un seul et même plan. Ceci peut poser des difficultés d'assemblages et induire des efforts de torsion au sein de la structure.

1.2.10. Conclusion

Nous avons vu que les gridshells sont des structures travaillant essentiellement en compression car la génération de leurs formes nous vient de la technique du filet inversé reposant sur l'analogie avec les câbles et l'étude de leurs déformations. Cette technique bien que nécessitant des simulations physiques en plus de l'étude des maquettes, permet de générer des formes coques. Cependant cette technique ne permet pas de partir d'une forme architecturale préétablie pour en générer un maillage structurel. Le concepteur doit avoir recours à une autre méthode reposant sur la théorie des réseaux de Tchebychev et de son application concrète : la méthode des compas. Il s'agit d'une méthode relativement simple et efficace, qui a fait ces preuves dans le passé. Cependant cette méthode présente quelques inconvénients venant du fait que celle-ci soit exclusivement géométrique ne tenant pas compte de la physique du matériau. La méthode des compas et la génération des réseaux de Tchebychev font toujours l'objet de recherche en vue d'optimisation et de minimisation de ces inconvénients. Cependant nous cherchons à unifier les deux méthodologies avec un même processus s'appliquant sur des formes libres de coques.

Pour cela la méthode reposant sur les courbes géodésiques peut s'avérer pertinente, c'est ce que nous démontrerons par la suite. Elle est issue des travaux de plusieurs scientifiques du début du XX^{ème} siècles basés sur l'étude des surfaces non euclidiennes.

Dans la partie suivante nous présenterons le cas d'étude sur lequel nous appliquerons notre nouvelle méthode de génération de gridshells.

2. PRESENTATION DU CAS D'ETUDE

Dans cette partie nous détaillerons l'origine des coques qui seront le support de nos recherches et le fil conducteur de ce mémoire. La forme architecturale présentée ici est issue d'un projet d'architecture réalisé dans le cadre du programme Erasmus à l'université de Liège en Belgique.

2.1. PRESENTATION DU MAITRE D'OUVRAGE

L'objet architectural que nous allons présenter est le résultat de l'interprétation d'un programme énoncé par un maître d'ouvrage indépendant « *L'Observatoire du monde des plantes* ». Il s'agit d'une institution publique autour d'un jardin, située à quelques kilomètres de la ville de Liège, ayant des missions pédagogiques autour de la découverte du vivant. Ce jardin est constitué de serres botaniques couvertes et de grands espaces verts attenants, accueillant un ensemble de cultures végétales. Ce jardin botanique est le lieu d'ateliers pédagogiques à destination d'un très jeune public mais également d'étudiants en botanique et agronomie. Les missions réalisées auprès des très jeunes consistent pour l'essentiel à leur faire découvrir les bienfaits du jardinage, de la culture potagère et à cuisiner les légumes et les fruits récoltés. Ces ateliers promeuvent donc l'agriculture biologique non intensive avec des ateliers culinaires. Cependant, cet établissement ne possède pas d'espace dédié à ces ateliers. Notre programme architectural doit donc être une réponse à ce besoin.

2.2. PROGRAMME ARCHITECTURAL

Le programme architectural que nous allons définir s'inscrit sur un site extérieur au bâtiment déjà existant du jardin botanique. La topographie y est relativement prononcée avec la présence de nombreux feuillus. L'objet architectural doit s'intégrer à ce site en minimisant les décaissements et avec un impact nul sur la végétation environnante.

Le programme doit pouvoir répondre à plusieurs besoins fonctionnels. Tout d'abord, cet espace doit pouvoir accueillir une vingtaine d'enfants (ainsi que d'éventuelles personnes à mobilité réduite), qui doivent pouvoir se dévêter, se déchausser et ranger leurs affaires. Cet espace doit contenir une cuisine ainsi qu'un grand plan de travail et des tables pour que les enfants puissent y déguster les plats qu'ils auront préparés. L'ensemble de cet espace doit s'organiser dans une superficie de 50m² au maximum afin de s'affranchir des réglementations thermiques en vigueur pour des ouvrages

supérieurs à cette superficie. Cet espace doit être en revanche totalement étanche à l'eau mais également à l'air.

2.3. NAISSANCE DE LA FORME ET IMPLANTATION

Nous passerons rapidement sur le processus de recherche de forme pour aboutir à la forme finale que nous étudierons.

Le projet s'articule autour d'un assemblage de trois coques de formes différentes générées à partir du tracé d'un triangle équilatéral dont on peut voir la trace sur ce plan tracé main (figure 22)

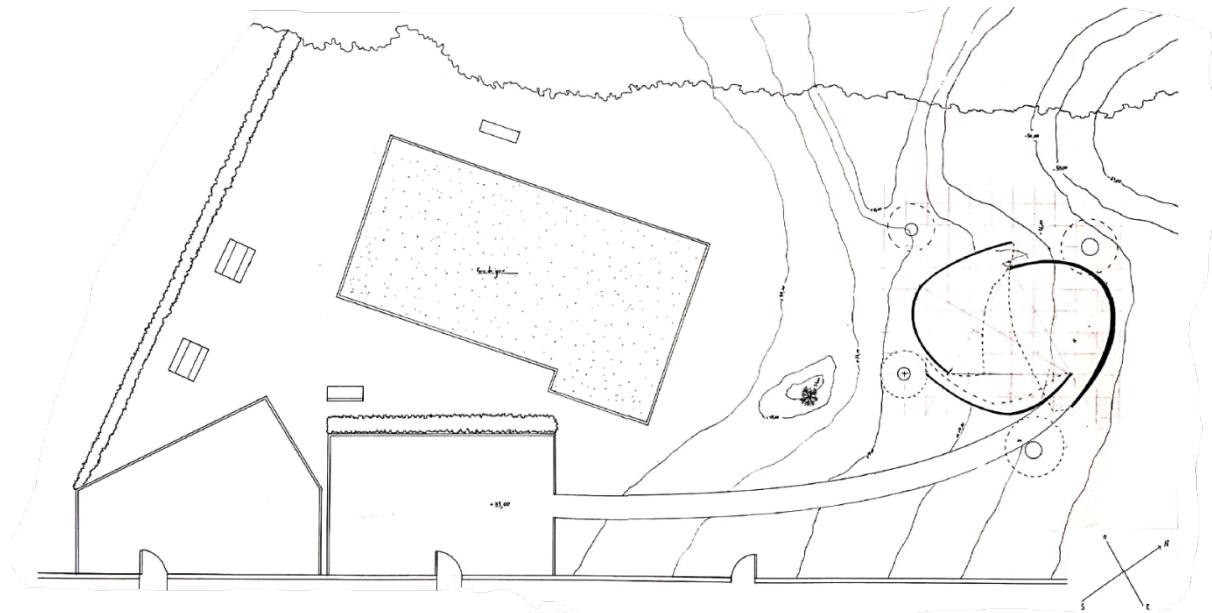


Figure 22 : Plan d'implantation des coques au sol au 1:200^{ème}

Les espacements entre les coques permettent d'y intégrer les ouvertures et notamment une rampe d'accès pour les personnes à mobilité réduite. Cette emprise au sol se développe en élévation avec la constitution de coques de hauteurs et de courbures différentes (figure 23).



Figure 23 : Volumétrie des trois coques

Ces volumétries ont été obtenues à l'aide du plugin *Grasshopper*⁴ de *Rhinocéros*. Pour la suite de notre mémoire, nous avons récupéré le modèle d'établissement de ces volumes. Ces coques sont pleines, la lumière sera apportée par la toiture sous forme de verrière que l'on distingue sur la figure 23.

Ce modèle volumétrique plein doit être réalisé sur place et doit accueillir l'ensemble du complexe de toitures et de parois. Dans toute la suite du mémoire, nous nous interrogerons sur la manière la plus adéquate de réaliser un tel ouvrage. Il apparaît que la façon la plus courante de réaliser des coques est l'utilisation d'un maillage structurel. Cependant, à la différence des exemples historiques énoncés précédemment, celui-ci doit s'inscrire absolument dans la forme préétablie en phase de conception architecturale.

⁴ *Grasshopper* est un logiciel de programmation visuel permettant de créer des formes paramétriques c'est-à-dire des formes pouvant varier suivant des paramètres que le concepteur juge pertinents. Par la suite nous utiliserons cette fonctionnalité.

3. CHOIX DU MATERIAU POUR L'ELABORATION DE GRIDSHELLS

L'une des premières questions qu'un architecte et qu'un ingénieur se pose lors de la réalisation de la structure d'un ouvrage, est de savoir quel est le matériau le plus pertinent pour la réalisation de telle ou telle structure. En effet, suivant qu'on utilise le bois, l'acier, le béton, le verre ou la fonte, les propriétés physiques de ces matériaux imposent des techniques constructives particulières et ont des capacités résistantes différentes.

Cette partie est consacrée à l'utilisation d'une méthode transverse quant au choix du matériau structurel pour une typologie de structure donnée.

3.1. PRINCIPE DE LA METHODE DE ASHBY

L'ensemble des gridshells présentés précédemment sont en structure bois à l'exception du premier gridshell de Vyska. Il est apparu de manière empirique que le bois est le matériau le plus adapté au processus de montage particulier des gridshells. De manière pratique, on comprend bien que les matériaux cimentaires ont une trop grande raideur en flexion pour obtenir les courbures souhaitées et sont trop fragiles pour reprendre des efforts en traction. Les matériaux métalliques ont quant à eux la propriété d'accepter des déformations plus importantes avant rupture. Ils peuvent prétendre à être utilisés pour la construction de gridshells bien que le comportement élasto-plastique de ce matériau peut entraîner des déformations incompatibles avec la mise en forme de ces structures. Michael F. Ashby [1] propose un outil de comparaison entre les différents matériaux basé sur des diagrammes et ratios facilement exploitables par les concepteurs.

La performance du matériau est basée sur une combinaison de propriétés comme les rapports résistance/poids, contraintes/déformations en relation avec la géométrie de section, etc. Ces performances sont représentées à l'aide de diagrammes qui sont dépendants de chaque typologie de structures.

3.2. CARACTÉRISTIQUE DES GRIDSHELLS AU SENS DE ASHBY

Dans cette partie nous allons reprendre une partie des travaux de Ashby [1] sur la définition des indices de performance à prendre en compte pour la conception des gridshells. Nous nous proposons ici de reprendre quelques-uns de ces indices, les plus pertinents pour la suite de notre étude, et la détermination du choix du matériau structurel.

3.2.1. Indice I_1 : critère de courbure

La première caractéristique dont doit tenir compte le concepteur d'un gridshell est la capacité de la grille à accepter de grandes déformations élastiques. Plus grande est la déformation élastique du matériau, meilleure sera sa capacité à constituer des surfaces avec des courbures importantes. Il s'agit donc du matériau qui pour un diamètre d (cas générique de matériau avec une section tubulaire) donné, permet d'obtenir le plus faible rayon de courbure r pour une contrainte maximale en flexion σ^{max} dans une poutre avec un module d'Young E . Ces valeurs sont liées par la relation mathématique suivante :

$$\sigma^{max} = E \frac{d}{2r}$$

En introduisant la contrainte maximale élastique σ_e , on obtient le rayon de courbure minimal avec la relation suivante :

$$r^{min} = \frac{d}{2} \frac{E}{\sigma_e}$$

Le matériau qui autorise les plus grandes courbures est celui qui minimise le rayon de courbure et donc celui qui maximise le critère I_1 :

$$I_1 = \frac{\sigma_e}{E}$$

3.2.2. Indice I_2 : critère de rigidité

Une structure en gridshell, comme toutes les structures, doit satisfaire des critères d'Etat Ultime de Service (ELS). Ces critères de dimensionnement tiennent compte de la déformation de la structure. Par conséquent, plus un matériau est rigide pour une même section, meilleure sera sa performance vis-à-vis du critère ELS. Cela revient donc à minimiser la déformation de la structure du gridshell et donc à maximiser son module d'Young.

$$I_2 = E$$

3.2.3. Indice I_3 : indice de ténacité

La mise en place d'un gridshell en phase construction apporte des contraintes importantes sur la structure. Il est donc important que le matériau utilisé puisse avoir la capacité de se déformer sans subir de dégradations d'ordre structurel. Pour cela, nous définissons un critère qui qualifie la ténacité K_{Ic} des matériaux. Il apparaît expérimentalement que pour un matériau quelconque possédant une microfissure dont la longueur maximale est a_c avant chargement, la contrainte σ_f à laquelle se produit la rupture du matériau est alors donnée par :

$$\sigma_f = \frac{CK_{Ic}}{\sqrt{\pi a_c}}$$

Dans cette expression, le terme C est une constante dépendante de la géométrie de la section utilisée. Le matériau adéquat pour la construction de gridshell doit donc pouvoir se déformer élastiquement ε_f sans atteindre la contrainte de rupture. En utilisant la loi de Hooke nous obtenons l'expression suivante :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \text{ soit } \varepsilon_f = \frac{CK_{Ic}}{E\sqrt{\pi a_c}}$$

De cette expression, nous pouvons en déduire que le matériau où le risque de rupture durant la phase de construction est le plus faible est celui maximisant la valeur de l'indice I_3 donnée par :

$$I_3 = \frac{K_{Ic}}{E}$$

3.2.4. Indice I_4 : contenu énergétique

M. Ashby définit ce critère pour tenter de prendre en compte le coût global d'un procédé industriel en termes d'énergie consommée et d'impact environnemental. Il s'agit en quelque sorte d'un critère « bilan carbone » en phase du choix d'un matériau pour la conception de gridshell. Les coûts énergétiques qui surviennent tout le long de l'utilisation d'un matériau sont nombreux (fabrication, transport, mise en œuvre, vie en œuvre, démantèlement et recyclage). M. Ashby, dans son ouvrage n'en précise pas les termes utilisés pour l'élaboration de son indice. Nous pouvons cependant faire l'hypothèse que Ashby prenne en compte l'énergie de l'ensemble du cycle de vie du matériau. Ce critère n'a pas vocation à être précis mais il permet tout de même de distinguer des grandes familles de matériaux. L'indice I_5 est donné par la formule suivante :

$$I_5 = \frac{\sqrt{E}}{Q\rho}$$

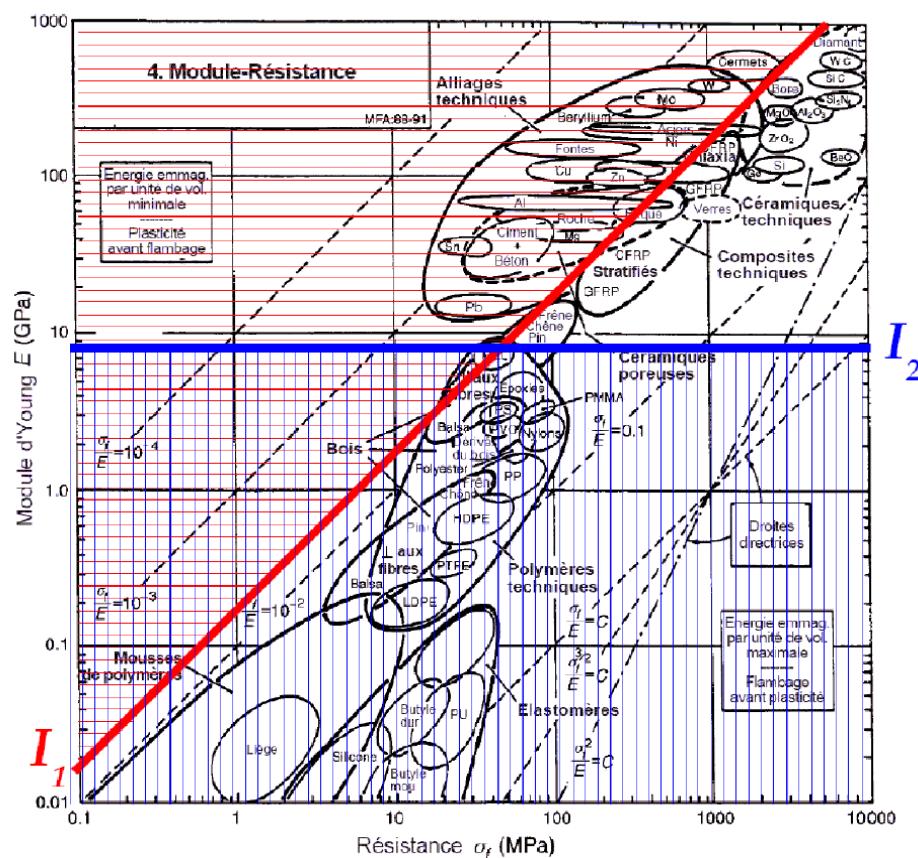
Avec Q_p le contenu énergétique par unité de volume. Cet indice est à maximiser ce qui peut se faire soit en faisant tendre Q_p vers 0 soit en faisant tendre E vers l'infini.

3.2.5. Recherche du meilleur matériau

Nous nous retrouvons avec une série d'indices et de ratios numérotés de 1 à 4 :

- Critère de courbure : $I_1 = \sigma/E$
- Critère de rigidité : $I_2 = E$
- Critère de ténacité : $I_3 = K_{IC}/E$
- Critère énergétique : $I_4 = E^{1/2}/Q_p$

Il est à noter que la démarche de M. Ashby prend en compte d'autres ratios que nous avons choisi de ne pas expliciter ici. Une fois ces ratios établis, M. Ashby a choisi de les représenter sous forme de diagrammes avec les valeurs propres de chaque matériau utilisable dans la construction. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur le diagramme relatif au premier indice. Pour cela nous nous baserons sur l'étude réalisée par C. Douthe [6] dans sa thèse en 2007.



Ce premier diagramme (figure 24) montre la résistance avant rupture en MPa de différents matériaux en fonction du module d'Young en GPa. Les droites I_1 et $I_2=9\text{GPa}$ correspondent aux valeurs obtenues pour des bois peu denses comme le pin. Pour maximiser cet indice, il faut que la droite I_1 se décale vers la droite et que la droite I_2 monte. Nous remarquons sur ce diagramme que certains matériaux comme le béton ou encore l'acier semblent plus adaptés pour la réalisation de gridshells.

Le second diagramme, figure 25, est quant à lui basé sur le critère de ténacité :

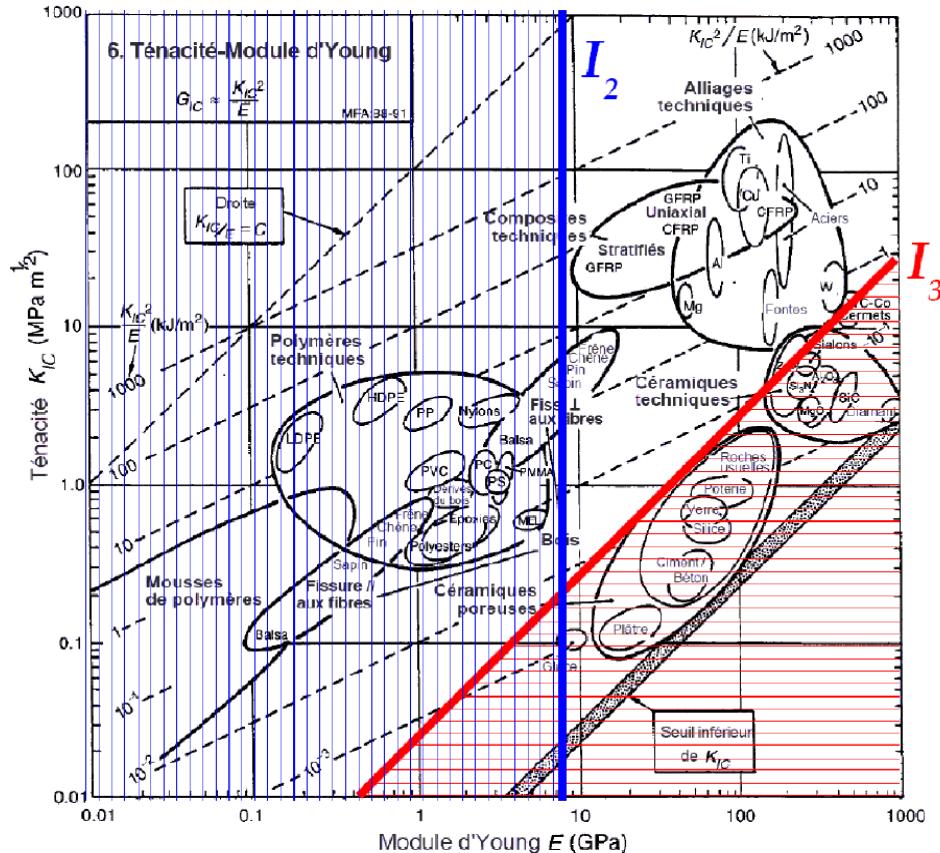


Figure 25 : Diagramme ténacité / Module d'Young ([6] Douthe 2007)

Ce diagramme représentant le module d'Young en fonction de la ténacité permet l'élimination de certains matériaux que l'on peut juger comme trop fragiles vis-à-vis des déformations subies durant la phase de mise en œuvre. La valeur I_2 correspond au module d'Young E d'un bois peu dense pris comme hypothèse précédemment. Dans sa thèse, C. Douthe [6] choisit arbitrairement une valeur pour la courbe I_3 afin de délimiter les zones où les matériaux sont considérés comme trop fragiles. Ces valeurs sont celles d'un verre légèrement plus résistant que la moyenne (verre ayant subi une trempe thermique par exemple). Par conséquent, l'ensemble des valeurs sous la courbe I_3 et à gauche de la courbe I_2 ne peuvent convenir pour la réalisation de gridshells. En revanche, les

acières et les matériaux composites en fibre de verre (GFRP) et en fibre de carbone (CFRP) sont de bons candidats vis-à-vis du critère de ténacité. Un élément important et qui sera crucial pour la suite de notre mémoire se trouve être le caractère anisotrope du bois. En effet le module d'Young et par voie de conséquence la résistance du bois est plus élevée lorsque les efforts sont parallèles aux fibres. Il en est de même pour la ténacité qui est plus grande lorsque les fissures surviennent perpendiculairement aux fibres.

Le dernier critère que nous avons à étudier se trouve être le critère énergétique. Celui-ci est décrit dans le diagramme suivant :

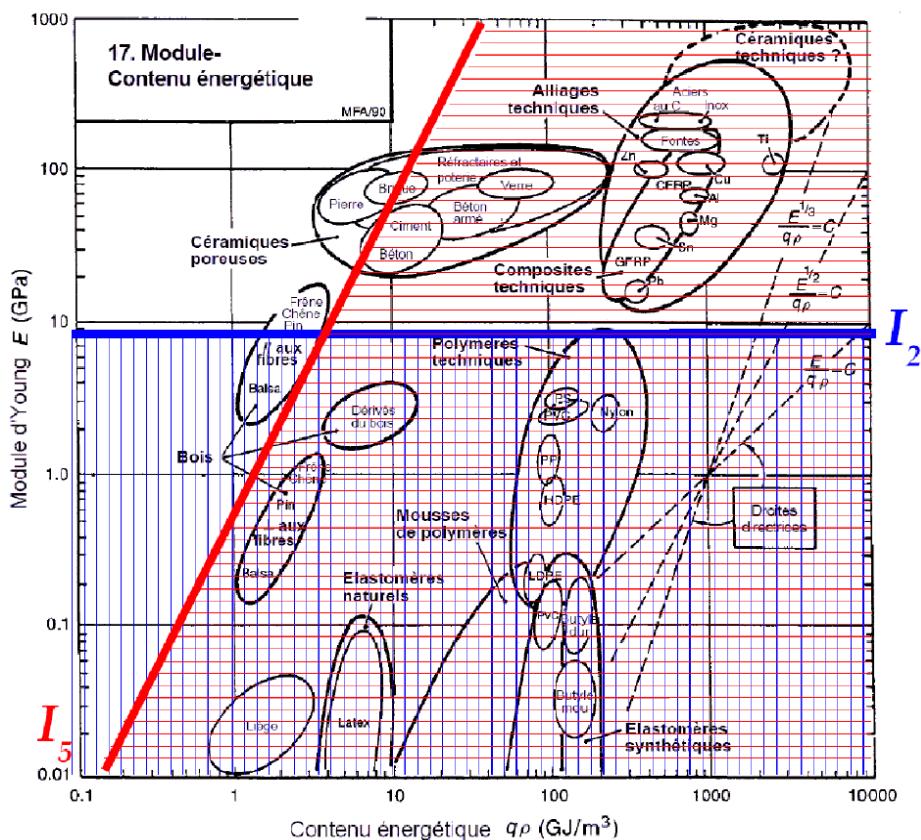


Figure 26 : Diagramme module d'Young en fonction du contenu énergétique par unité de volume ([6] Douthe 2007)

Le diagramme de la figure 26, représente le module d'Young E en ordonnée avec le contenu énergétique Q_p en abscisse en GJ/m^3 . De la même manière que précédemment, l'indice I_2 correspond au module d'Young d'un bois peu dense. Ce qui est intéressant de constater dans ce graphique est que le bois a la particularité d'avoir un contenu énergétique bien plus faible que les aciers ou que les matériaux composites qui sont pourtant très performants vis-à-vis du critère de ténacité. Cependant,

ce graphique reste à nuancer. Certes le matériau bois reste celui dont l'impact environnemental est le plus faible mais on ne tient pas compte des traitements chimiques nécessaires à celui-ci pour résister aux agressions de son environnement. Parmi les agressions pour lesquelles le bois est particulièrement vulnérable se trouvent la résistance aux UV, les insectes xylophages, les environnements où l'hygrométrie varie de manière importante. Toutes ces agressions extérieures seront considérées comme inexistantes dans la suite de notre étude.

3.2.6. Conclusion du critère de Ashby

L'utilisation de la méthode d'Ashby dans le choix du matériau pour la réalisation de gridshells nous permet de comprendre que le bois reste intéressant du fait de ses propriétés. Cependant, d'autres matériaux peuvent également être plus performants que le bois sur certains critères. Il s'agit donc pour le concepteur de faire un choix vis-à-vis des contraintes que la structure doit pouvoir reprendre tant en phase finale qu'en phase construction.

Pour la suite de notre étude, nous choisissons de considérer que la structure en gridshell sera réalisée à partir d'un feuillu du type chêne ou frêne. En effet, ce sont les essences qui maximisent les critères de Ashby. Les modules d'Young des feuillus sont supérieurs à ceux pris pour hypothèse par C. Douthe. Les modules d'Young axiaux sont compris entre 11 et 20GPa du fait de leurs densités plus élevées.

4. REALISATION DES MAILLAGES DES GRIDSHELLS

Nous définirons les propriétés géométriques des courbes géodésiques qui feront l'objet de démonstrations succinctes puis nous appliquerons à nos volumétries de coques cet outil mathématique au moyen de *Grasshopper*.

4.1. DEFINITION DES COURBES GEODESIQUES SUR UNE SURFACE DE \mathbb{R}^3

Nous nous intéresserons à la théorie qui sous-tend la conception des maillages géodésiques. Il s'agit ici d'une vision partielle de celle-ci en se focalisant dans un domaine à trois dimensions. Pour cela, nous nous baserons sur un cours donné par M. Frédéric Faure à l'université Joseph Fourier en 2022 [8].

4.1.1. Première propriété : trajectoire la plus droite sur une surface

Soit S une surface plongée dans \mathbb{R}^3 et $x \in S$ un point, on note $T_x S$ le plan tangent à la surface S au point $x \in S$. ($T_x S \subset \mathbb{R}^3$) est le plan contenant tous les vecteurs tangents à S au point x (figure 27). Si l'on considère une particule animée d'une vitesse quelconque sur la surface S , alors la direction de la vitesse $v(t)$ de cette particule est inclue dans le plan tangent à la surface S quelle que soit la trajectoire $\gamma(t) \in S^2$. La vitesse se note :

$$v(t) \in T_{\gamma(t)} S^2$$

La figure 27 permet la représentation de ces notations dans le cas d'une surface particulière, celle de la sphère :

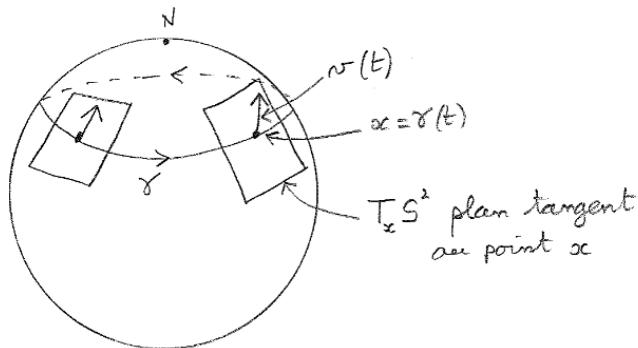


Figure 27 : Schéma représentation des notations dans le cas d'une sphère [8]

En reprenant le chemin paramétré $\gamma(t)$ sur une surface S dans \mathbb{R}^3 , on note le vecteur vitesse tangent

au point $\gamma(t)$

$$v(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}S$$

La trajectoire γ décrit une courbe géodésique si :

$$\frac{Dv}{dt} = 0, \forall t$$

C'est-à-dire si le vecteur vitesse est constant.

Autrement dit, la trajectoire géodésique correspond au mouvement libre d'une particule contrainte à rester sur une surface S . En effet, nous nous retrouvons à réécrire la seconde équation de Newton dans le cas généralisé d'une surface quelconque, lorsque la somme des forces s'appliquant sur cette particule est nulle :

$$m \frac{Dv}{dt} = F$$

Avec m la masse de la particule et F la somme des forces s'appliquant sur la particule.

Dans le cas usuel, c'est-à-dire dans le cas d'un référentiel galiléen dans un espace euclidien, une particule dont la somme des forces qui s'y appliquent est nulle alors la trajectoire de la particule se trouve être un mouvement rectiligne uniforme (ou immobile). La trajectoire que suit cette particule est alors une droite en absence de forces de frottement.

Les courbes géodésiques sont donc la généralisation de la droite sur une surface courbe.

4.1.2. Deuxième propriété : distance la plus courte entre deux points

Pour pouvoir définir la seconde caractéristique intrinsèque aux courbes géodésiques, il va nous falloir définir quelques outils supplémentaires. Parmi ces outils, on trouve le tenseur métrique qui est un objet mathématique que l'on associe à une surface. En tout point de cette surface, il fournit une grille qui épouse la géométrie de la surface et qui nous permet de mesurer des longueurs et des angles.

Pour tout point de la surface $x \in S$, on note g_x le produit scalaire sur l'espace tangent $T_x S$:

$$u, v \in T_x S, g_x(u, v) = g(u^i e_i, v^j e_j) = u^i v^j g(e_i, e_j) = u^i v^j g_{i,j}$$

Avec e_i les vecteurs de la base considérée et u^i, v^j les composants des vecteurs.

On dit que g_x ou $g_{i,j}$ est le tenseur métrique sur S induit par le produit scalaire sur \mathbb{R}^3 . Avec la définition de ce tenseur métrique, on peut ainsi définir la distance qui sépare deux points et par extension la norme d'un vecteur quelconque de la surface S soit :

$$(ds)^2 = g_{ij} u^i v^j \text{ et } \|\vec{v}\|^2 = g_{ij} u^i v^j$$

La longueur d'un segment d'une courbe partant d'un point a à l'instant t_1 et arrivant au point b à l'instant t_2 est défini par :

$$L = \int_a^b \sqrt{ds^2} = \int_a^b \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

Où $((x^1(t), \dots, x^n(t))$ est l'équation décrivant la courbe dans le système de coordonnées local.

Maintenant, pour pouvoir donner la preuve que la courbe géodésique est bien le chemin le plus court entre deux points et minimise donc la distance L sur une surface donnée, il nous faut déterminer l'équation des courbes géodésiques. Pour cela nous repartirons de la première propriété :

$$\frac{\nabla v}{dt} = 0$$

Nous pouvons décomposer le vecteur vitesse en ses composantes multipliées par les vecteurs de base.

$$\frac{d(v^i \vec{e}_i)}{dt} = v^i \frac{d\vec{e}_i}{dt} + \frac{dv^i}{dt} \vec{e}_i = \vec{0}$$

On obtient une relation qui fait apparaître les variations des composantes du vecteur vitesse et d'autre part les variations des vecteurs de base. En effet, ces vecteurs de base évoluent au cours de la trajectoire du fait des variations du plan tangent T .

L'objectif suivant est de s'affranchir de la variation du vecteur de base le long de la trajectoire en le décomposant comme la somme des variations de chacune des deux coordonnées multipliées par la vitesse de déplacement de la particule. Cette astuce permet d'obtenir une variation de ce vecteur de base qui est directement liée à la déformation de la grille contenue dans le plan tangent. Ces variations de la grille indépendantes de la trajectoire peuvent être calculées à l'aide de ces équations différentielles. On nomme les valeurs des variations de la grille par les symboles de Christoffel Γ . Ces valeurs se calculent directement à partir de la métrique d'un espace que nous avons défini précédemment. En utilisant ces symboles et en réécrivant l'équation précédente, on obtient finalement l'équation des courbes géodésiques ⁵:

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{\mu\nu}^i v^\mu v^\nu$$

⁵ Nous avons volontairement passé quelques étapes de calcul, μ et ν correspondent aux deux directions dans lesquelles on mesure la variation des vecteurs de base. Dans le cas d'une grille en deux dimensions déformées, il y aura alors deux fois deux variations à mesurer. La matrice de Christoffel est une matrice 2x2.

En remplaçant la vitesse par la position on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

À partir de cette équation il est possible de montrer que l'équation des courbes géodésiques minimise la distance L.

4.1.3. Espacement des courbes géodésiques

Pour pouvoir caractériser la courbure d'une surface, les mathématiques ont développé un nouvel outil à partir des symboles de Christoffel que l'on appelle tenseur de courbure de Riemann. Il ne s'agit pas ici de faire une démonstration de la façon dont on obtient ce tenseur mais d'appréhender la complexité de la définition des surfaces courbes et du nombre d'outils nécessaires pour pouvoir les décrire.

Le tenseur de courbure se définit comme suit⁶ :

$$R_{\mu\nu\beta}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\lambda$$

Ce tenseur de courbure exprime l'évolution de ces courbes géodésiques les unes par rapport aux autres. Nous nous aiderons de la figure 28 qui décrit l'espacement des courbes géodésiques à l'approche d'une singularité surfacique. Nous remarquons que plus la courbure est importante et plus deux courbes géodésiques parallèles au voisinage d'un point P se rapprochent ou s'éloignent

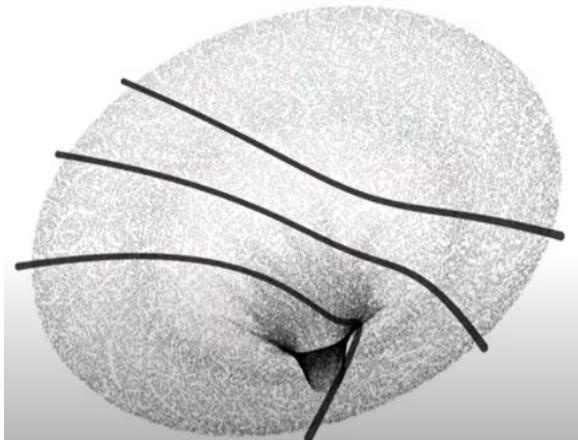


Figure 28: Espacement des géodésiques au niveau d'une singularité surfacique [18]

rapidement. Dans notre cas, les courbes géodésiques se rapprochent mais il s'agit d'un cas particulier.

⁶ Nous admettrons cette formule nous venant directement des travaux du mathématicien allemand Bernhard Riemann. Il est intéressant de constater que cette formule est directement reliée au symbole de Christoffel. Ces travaux ont contribué à la théorie de la relativité générale développée par Albert Einstein.

Il est important de constater que les singularités surfaciques ne sont pas un obstacle à la génération d'un maillage géodésique sur la surface. Au contraire, les courbes géodésiques ont tendance à éviter ces singularités qui ne peuvent avoir de réalité physique.

Dans le cas d'une surface, le tenseur de Riemann est égal à la courbure de Gauss K ou courbure totale d'une surface. Il s'agit du produit des courbures principales d'une surface. Du fait de la discréétisation de nos coques, nous ne ferons pas appel directement à la courbure de Gauss.

4.1. REALISATION D'UN MAILLAGE DE COURBES GEODESIQUES

L'application du maillage de courbes géodésiques sur l'ensemble de nos coques a été réalisée au moyen du logiciel de programmation visuelle *Grasshopper*. La figure 29 est extraite du programme *Grasshopper* et la figure 30 est la représentation visuelle du maillage géodésique.

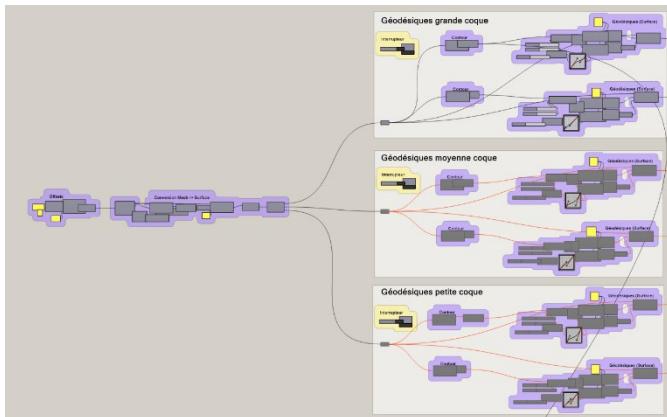


Figure 29 : Extrait programme Grasshopper

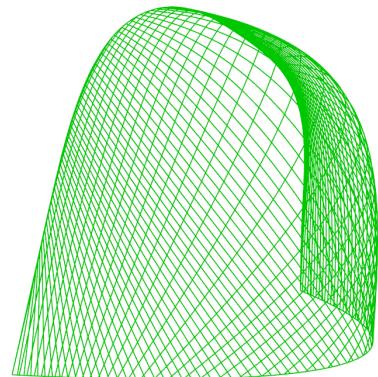


Figure 30 : Visualisation du maillage géodésique sur la grande coque

Pour pouvoir appliquer le maillage géodésique sur la surface préalablement définie, nous avons dû passer par un certain nombre d'étapes que nous allons détailler.

Première étape :

Il s'agit de la conversion d'un maillage issu de la génération de la forme architecturale en une surface. Cela est dû aux besoins programmatiques nécessaires à la conception de la coque que nous ne détaillons pas dans ce mémoire.

Afin de mener à bien cette étape, nous avons dû décomposer notre maillage déjà présent en un nombre de points assez conséquent pour obtenir une image fidèle de la surface originelle. À partir de ces points nous avons reconstitué une surface par simple interpolation.

Seconde étape :

Elle consiste à définir le contour de la coque, ce qui correspond d'un point de vue physique, aux

conditions aux limites du système. Ces bordures sont de deux types : celles qui sont en contact avec le sol et celles qui sont en hauteur. Prendre chaque coque séparément revient à distinguer deux bordures. Elles sont respectivement les points de départ et d'arrivée de nos courbes géodésiques.

Troisième étape :

Nous divisons le contour de la coque en un nombre important de points, que nous relions. L'objectif est d'avoir un nombre suffisant de courbes géodésiques pour décrire fidèlement la forme architecturale. Nous utilisons pour cela la puissance de la programmation paramétrique qui nous permet de faire varier le nombre de segmentations de ces bordures. Après plusieurs essais, nous nous apercevons qu'une discréétisation des bordures du système entre 40 et 50 éléments convient pour obtenir un maillage suffisamment dense. Au-delà d'une cinquantaine d'éléments, certaines zones des côtés de la coque deviennent trop densément maillées tant est si bien que les éléments bois du futur lattage seront trop proches pour avoir une réalité physique. Nous avons également reparamétrisé la répartition de ce découpage selon une courbe de Bézier dont nous avons fait varier les paramètres. Cette reparamétrisation s'est avérée indispensable dans la mesure où les variations de courbures sur la surface de la coque ne sont pas uniformes (voir partie étude de la courbure). Les côtés ainsi que la partie haute de la coque sont les parties subissant les variations les plus importantes de courbures. Il est donc nécessaire que le maillage soit légèrement plus dense dans ces zones spécifiques.

Quatrième étape :

Lors de la quatrième étape, nous appliquons à un composant *Grasshopper* la surface, le point de

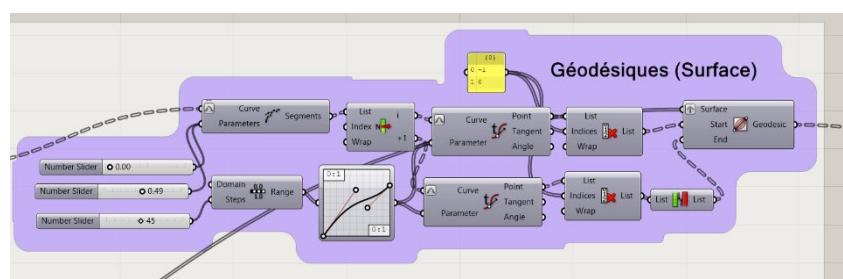


Figure 31 : Programme Grasshopper du maillage géodésique

départ et d'arrivée permettant de tracer une courbe géodésique (figure 31). D'un point de vue informatique il n'est pas si compliqué de tracer des courbes géodésiques dans la mesure où celles-ci sont générées à partir de différents tenseurs (et que les mathématiques fournissent les formules à utiliser) et que celles-ci s'écrivent de manière matricielle. Par conséquent le composant, *Grasshopper* utilise la même méthode analytique que décrite dans la partie 4.2 en utilisant cette fois ci l'écriture

matricielle de ces tenseurs. En ce qui nous concerne, il nous suffit de récupérer les données d'entrée à partir des étapes décrites précédemment afin d'obtenir les courbes géodésiques. À ce stade nous obtenons seulement une partie du maillage avec les courbes géodésiques orientées dans un seul sens. Nous devons répéter ce procédé afin de créer la seconde partie du maillage en partant des mêmes points de départ avec les mêmes points d'arrivée avec un angle par rapport à la première génération de courbes géodésiques. Ces étapes sont répétées sur l'ensemble des différentes coques comme on peut le voir sur la figure 30.

4.2. GENERATION DES EPAISSEURS DU LATTAGE

Dans cette partie nous allons tenir compte de l'épaisseur que peuvent avoir les lattages de bois. Bien entendu, cette partie du programme *Grasshopper* est également paramétrable ce qui nous permet par la suite de modifier les épaisseurs des maillages en fonction de considération de résistance des matériaux que nous expliciterons dans les parties suivantes.

Les étapes *Grasshopper* de la génération des épaisseurs du maillage sont décrites sur la figure 32.

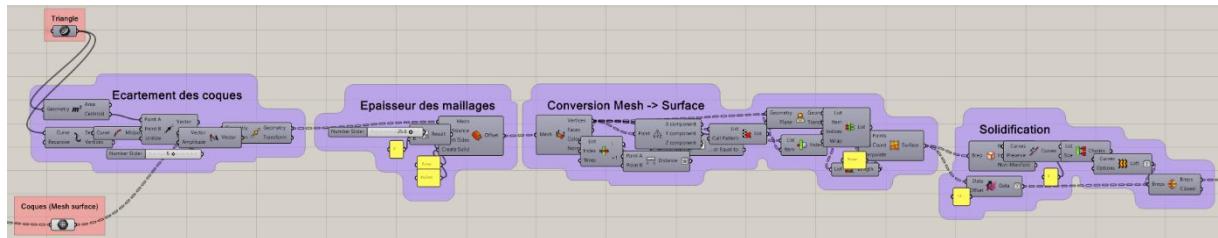


Figure 32 : Extrait programme Grasshopper pour la génération d'une épaisseur au maillage

La génération des épaisseurs est plus complexe qu'un simple agrandissement d'échelle de la coque en question car celle-ci est composée de différentes parties de natures différentes (mesh, curves, surface). Il a donc fallu repartir du tracé régulateur qui nous a permis de générer les coques à l'origine (voir partie 2) pour pouvoir procéder au changement d'échelle des coques. Dans un second temps, on indique une épaisseur à ce maillage. Cette épaisseur est en quelque sorte le facteur d'échelle d'agrandissement de la coque initiale (figure 33).

Une fois cet agrandissement réalisé, nous avons dû nous remettre dans les mêmes dispositions que précédemment afin de pouvoir appliquer le maillage géodésique secondaire. Il a déjà été réalisé précédemment (figure 29) cependant nous l'avons adapté à la coque extérieure. Cette

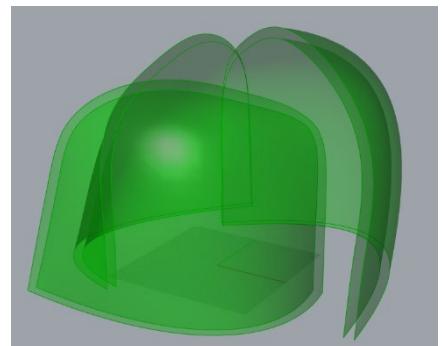


Figure 33 : Visualisation de l'écartement des coques

distance entre les deux maillages doit tenir compte de l'épaisseur de nos éléments de lattage en bois ainsi que de l'assemblage. Bien entendu, à ce stade du programme *Grasshopper*, les dimensions des éléments bois ne sont pas fixes. Par conséquent, nous devons intégrer ce fait à l'écriture du programme. Ainsi, les paramètres d'écartement de la coque sont directement reliés aux deux couches de courbes géodésiques sécantes entre elles. Ceci nous permet ensuite de pouvoir traiter la position des assemblages par rapport aux deux réseaux du maillage.

4.3. INTERSECTION DES LATTAGES GEODESIQUES ET PLAN D'ASSEMBLAGE

4.3.1. Génération des assemblages sur *Grasshopper*

Cette étape consiste à repérer les points d'intersection des deux maillages géodésiques qui sont espacés de l'épaisseur des éléments bois. Cette étape est primordiale car elle constitue le plan de montage de la structure. En effet, les liaisons entre les courbes géodésiques ne permettent pas seulement la résistance de la structure mais permettent bel et bien de réaliser la forme architecturale. Ainsi, au fur et à mesure de l'assemblage que nous réaliserons, nous verrons apparaître la forme choisie. Pour pouvoir représenter cet assemblage, nous sommes repartis de la définition des deux nappes de courbes géodésiques qui sont espacées d'une distance arbitraire (figure 34).

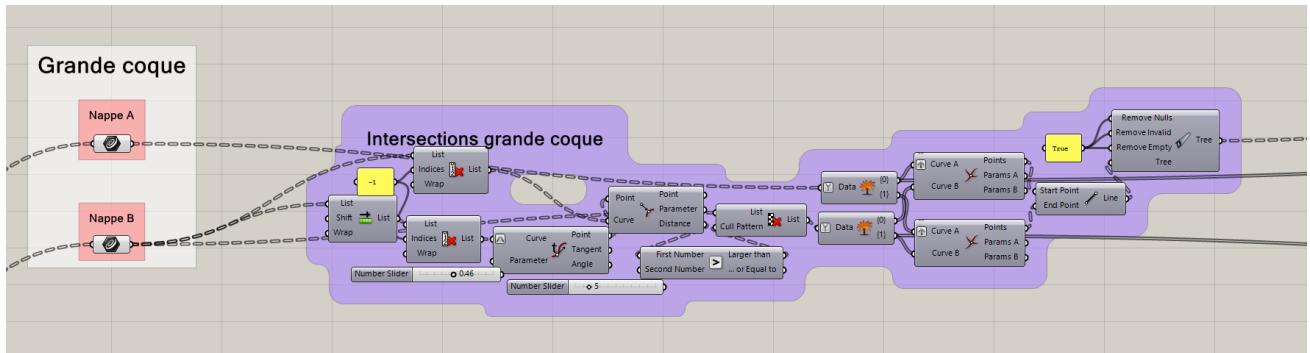


Figure 34 : Extrait programme *Grasshopper* permettant le repérage des intersections des géodésiques au niveau de la grande coque

Pour réaliser cela, nous appliquons les deux nappes de courbes géodésiques à la fois sur la coque intérieure et sur la coque extérieure. Puis nous repérons sur ces coques les points d'intersection du maillage géodésique. Enfin, nous relions l'ensemble de ces points pour former des petits segments qui représentent les goujons d'assemblage de notre structure. La figure 35 permet de visualiser, au moyen d'un agrandissement, ce que représentent ces éléments d'assemblage. Une fois cela réalisé,

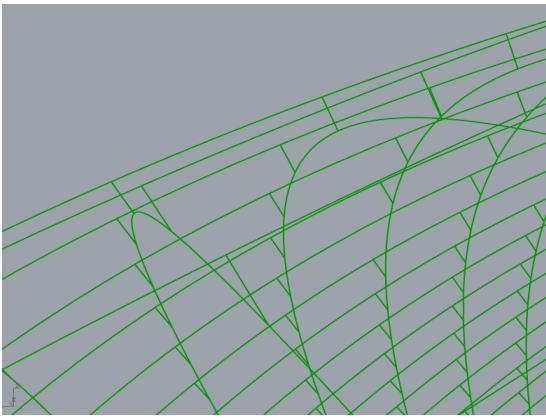


Figure 35 : Zoom sur les segments représentant l'assemblage des deux lattages géodésiques.

nous allons pouvoir procéder à l'élaboration des plans d'assemblage. Ils sont représentés sur la figure 36. Nous avons numéroté chacun des nœuds d'intersection par un numéro commun à la coque intérieure et la coque extérieure. Puis nous avons « déplié » chacune des courbes géodésiques dans le plan. Nous obtenons la longueur des éléments bois avant qu'ils ne soient courbés. Puis, nous repérons sur chacune de ces barres le point d'intersection ou point d'assemblage par un numéro. Nous procédons de la même manière avec le lattage géodésique de la coque intérieure. Ainsi, chaque nœud d'assemblage est repéré sur chaque plan de lattage.

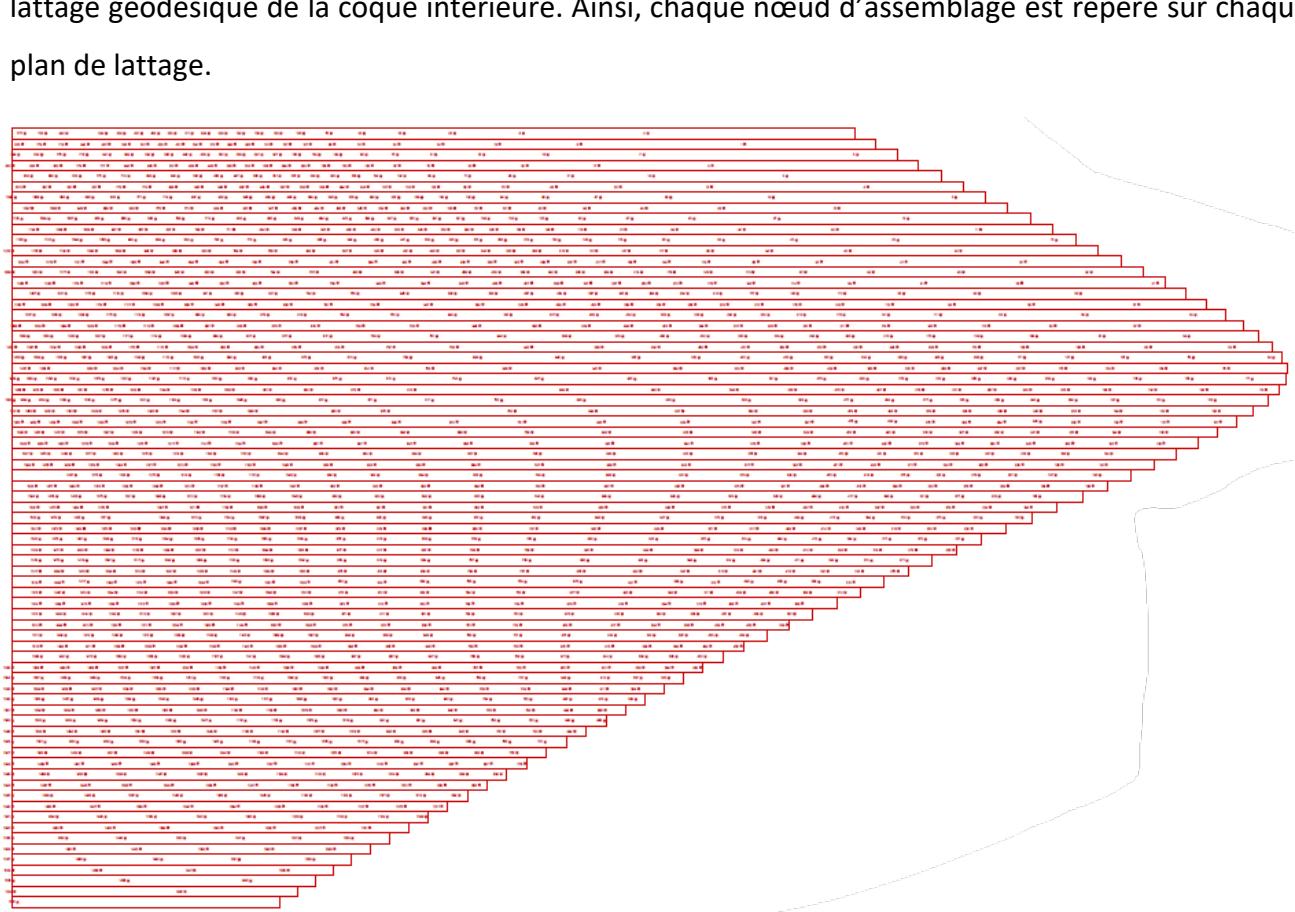


Figure 36: Plan de repérage des assemblages sur le lattage géodésique de la coque extérieur.

4.3.2. Choix d'un double lattage

Au cours de nos travaux, nous nous sommes posé la question de la nécessité ou non d'un lattage supplémentaire. Pour cela nous nous sommes intéressés aux études réalisées par Happold et Lidell [9] dans le cas de la conception de gridshells. Ils ont montré dans leurs travaux que le doublement du maillage a pour effet une augmentation de la charge critique d'un facteur entre 1.6 et 4.44. Ce phénomène est assez facilement explicable dans la mesure où ajouter une maille permet une meilleure répartition donc une augmentation de la charge critique applicable. Nous faisons donc le choix pour notre étude de disposer d'un double lattage au niveau d'une maille géodésique. Happold et Liddell expliquent également que ce double lattage offre au concepteur la possibilité d'ajouter des connecteurs entre les deux réseaux parallèles en plus de l'assemblage des maillages sécants. Son intérêt est de pouvoir reprendre des efforts de cisaillement. Ces connecteurs mis en place une fois le gridshell dans sa forme définitive, peuvent reprendre les efforts en cisaillement de la structure. Happold et Lidell ont montré qu'avec ce dispositif, la charge critique pouvait être augmentée d'un facteur 13. Cela vient du fait que l'inertie totale du dispositif avec les maillages déjà présents peuvent atteindre $I_{tot} = 26bh^3/12$. Elastica project [13] montre bien à nouveau la validité expérimentale de la théorie. Nous indiquons d'ailleurs dans le tableau de la figure 37 les valeurs obtenues expérimentalement.

Maillage	Contreventement	Bloque de cisaillement	Charge nodale critique en kg
Simple	Non	Non	1.05
Double	Non	Non	2.10
	Non	Oui	25.50

Figure 37 : Valeur de la charge critique nodale dans différent cas de figure du projet Elastica [15]

Au vu de ces résultats, nous avons fait le choix de procéder à la mise en place de ce double maillage. Nous pouvons le visualiser sur la figure 38. Les propriétés des courbes géodésiques ont comme autre intérêt de substituer les blocs de cisaillement par un autre dispositif d'assemblage. À ce stade et pour le reste de notre étude, nous considérerons un double maillage géodésique avec absence de bloc de cisaillement.

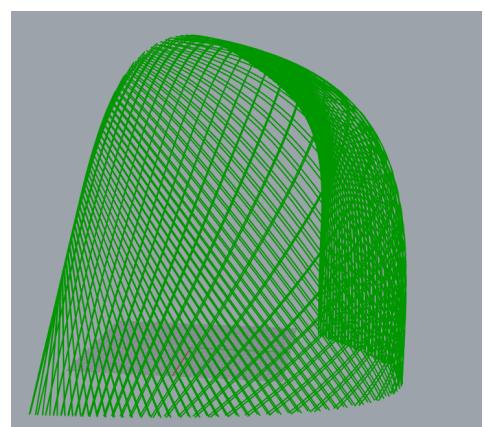


Figure 38 : Visualisation du double lattage sur la grande coque

4.3.3. Avantage des assemblages avec le maillage géodésique

Les courbes géodésiques épousent parfaitement la surface de nos coques. La seconde propriété des courbes géodésiques implique que deux courbes géodésiques parallèles ont leur vecteur normal parallèle. C'est exactement ce que nous avons réalisé précédemment où les vecteurs normaux de chacune de nos courbes géodésiques se confondent avec les segments représentant nos éléments d'assemblage. Mais cela signifie également que les éléments de lattage ont des surfaces de contact parallèles. Cette surface de contact parallèle offre la possibilité de pouvoir réaliser un assemblage non plus ponctuel au moyen d'une tige métallique mais par un assemblage de plusieurs tiges (figure 39). Cet assemblage permet de reprendre des efforts de cisaillement au niveau de la structure mais également de participer à son contreventement général. Par conséquent, l'utilisation des courbes géodésiques permet de générer des gridshells contreventés évitant ainsi de devoir générer un nouveau lattage de contreventement comme c'est le cas pour les gridshells de Mannheim ou de Downland. Les maillages géodésiques ont donc la faculté d'éviter la mise en place de ces deux dispositifs. Ce qui signifie à la fois une complexité d'assemblage inférieure étant donné l'absence d'une trame supplémentaire mais également un poids de structure plus faible et par voie de conséquence un ratio poids/résistance supérieur aux gridshells n'utilisant pas les courbes géodésiques.

Nous prenons par hypothèse, pour la suite de notre étude, que les assemblages de cette nature ainsi que leurs multiplicités suffisent à pouvoir contreventer notre structure entière. Il s'agit de l'hypothèse que nous prendrons lors des calculs de dimensionnement de la structure complète.

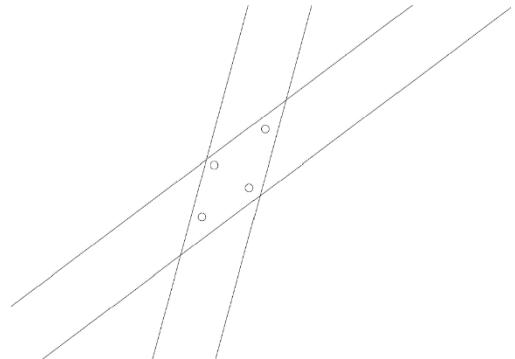


Figure 39 : Assemblage permettant le contreventement

5. DIMENSIONNEMENT DES ELEMENTS DU MAILLAGE

Nous nous intéressons au dimensionnement d'un élément bois constitutif du maillage. L'objectif de cette partie est de déterminer la section maximale que peuvent avoir les éléments de maillage permettant de calculer les efforts, contraintes et déformations de la structure globale dans la partie 6. Ce dimensionnement fait appel à différents critères.

5.1. ETUDE DE LA COURBURE DE LA COQUE

Nous commençons notre analyse par le rayon de courbure minimal. Il correspond à la valeur du rayon du cercle tangent en tout point d'une surface ou d'une courbe. La valeur du rayon de courbure est l'inverse de la courbure. Ce cercle se nomme cercle osculateur. Une équation différentielle permet de définir le rayon de courbure en tout point. Plus le rayon de courbure est élevé plus le tracé de la droite ou de la surface se rapproche d'un objet plan.

En reprenant nos coques et en effectuant cette analyse (figure 40) nous remarquons deux choses :

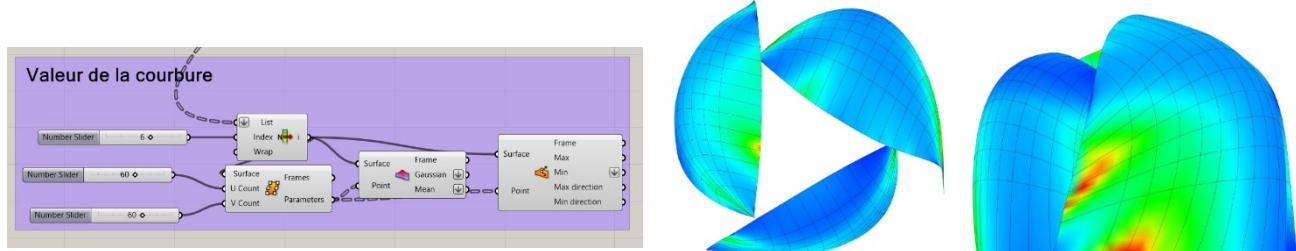


Figure 40 : Analyse du rayon de courbure minimal (à noter que le maillage visible est un maillage quelconque)

Premièrement, les bordures de ces coques ont des rayons de courbures importants et donc la courbure de la surface à ce niveau est assez faible par rapport aux autres zones de la surface. La zone la plus courbée de la surface est bien l'arrête centrale de chacune des coques. Deuxièmement, la coque de plus grande dimension est celle qui subit les plus grandes variations de courbure.

À partir de ces constations visuelles, nous nous sommes focalisés sur la grande coque. Au moyen du logiciel Excel, nous avons exporté les valeurs de ces rayons de courbure pour en extraire le minimum comme montré sur le tableau de la figure 41.

Rayon de courbure minimal (m)	Courbure minimale (m^{-1})
3.26	0.306

Figure 41 : Valeurs extrémiales des courbures de la grande coque

Ces valeurs de rayon de courbure sont à analyser au regard du critère de la force nécessaire pour courber l'élément bois. Cela dépend d'un certain nombre de facteurs tels que l'épaisseur, la longueur, l'angle de rotation etc.

5.2. ETUDE THEORIQUE DE LA COURBURE : CARACTERISTIQUE DE L'ELASTICA

Nous établirons la relation entre le rayon de courbure et la contrainte dans un élément de type poutre. Ceci nous permettra de connaître la section maximale que peuvent avoir les éléments constitutifs de notre maillage.

5.2.1. Courbure élastique

Nous prenons une poutre avec un moment quadratique I et un module d'élasticité E posée sur deux supports coulissants soumis à une force continue agissante même en cas de déplacement du support (figure 42).

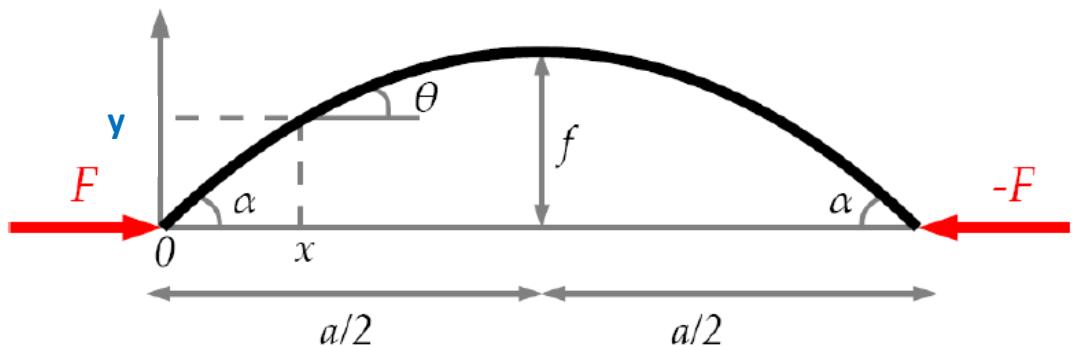


Figure 42 : Schéma d'une poutre soumis à des forces horizontales [6]

La flèche y est liée à l'abscisse de la courbe x par la relation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Au point $y(x)$ on a l'équation du moment :

$$M(x) = F \times y(x) \quad (2)$$

En combinant ces équations on obtient :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Fy(x) = 0$$

En résolvant cette équation différentielle du second ordre on obtient :

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) = 0 \text{ ou } \omega^2 = \frac{F}{EI}$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites de notre modèle :

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ et } y(L) = 0 \Rightarrow B \sin(wL) = 0$$

Tant que $\omega L < \pi$, la seule solution est A=0 et B=0 c'est le cas de la compression simple sans raccourcissement de la poutre. Au moment où $\omega L = \pi$, l'équation est vérifiée pour toutes les valeurs de B et le système devient instable. C'est ce que l'on appelle la charge critique d'Euler F_c :

$$\begin{aligned} wL &= \pi = \sqrt{\frac{F_c}{EI}} L \\ F_c &= \pi^2 \frac{EI}{L^2} \end{aligned}$$

À partir du moment où F atteint la charge critique d'Euler, l'élément poutre se met à flamber. Le flambement d'une poutre invalide l'équation (1) avec l'hypothèse de petits déplacements. À partir de ce moment, on ne peut plus assimiler le rayon de courbure $R(x)$ à la dérivée seconde de la flèche. On appelle courbure d'une poutre l'inverse du rayon du cercle tangent en un point. Le rayon de courbure dépend de l'abscisse x .

En injectant ce résultat dans l'équation (2), on obtient une nouvelle formulation de celle-ci :

$$\frac{EI}{R(x)} + Fy(x) = 0 \quad (3)$$

Nous ne pouvons pas intégrer directement cette équation différentielle étant donné que le rayon de courbure est également dépendant de x . Par conséquent nous allons procéder à un changement de coordonnées. Nous nous placerons dorénavant en coordonnées curvilignes avec s l'abscisse curviligne. Nous appellerons θ l'angle entre l'axe des x et la tangente à la fibre moyenne de la poutre déformée. On constate que le rayon de courbure $R(x)$ est relié à l'angle θ par la relation :

$$1/R(x) = \frac{d\theta}{ds} \text{ et } \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (3.1)$$

Nous allons ensuite multiplier les deux membres de l'équation (3) par $2 d\theta / ds$ et on intègre par rapport à θ pour obtenir :

$$EI \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = F(\cos \theta - \cos \alpha)$$

$$\text{car} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_0 = 0 \text{ (fibre neutre horizontale au niveau de l'appui)}$$

On peut réécrire l'expression précédente et exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de l'angle θ :

$$ds = \frac{-d\theta}{k\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}} \text{ avec } k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

En utilisant la relation trigonométrique de l'angle double :

$$ds = \frac{-d\theta}{2k\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad (4)$$

En écrivant que la longueur de la poutre est égale à L , on peut intégrer l'équation (4) entre $-\alpha$ et α .

On remarque que le problème est symétrique. Par conséquent on intègre seulement sur 0 et α sur une demi-longueur L , on obtient :

$$kL = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad (5)$$

Afin de pouvoir se ramener à une forme canonique connue, nous procédons à un changement de variable $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\Phi$:

$$kL = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\phi}}$$

Nous reconnaissons une intégrale elliptique à la forme canonique de Legendre dont les valeurs sont calculables numériquement ou à l'aide d'abaques. L'expression peut alors s'écrire $kL = 2I\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ avec I l'intégrale de Legendre.

Pour calculer la flèche maximale à mi-portée, on utilise la relation cinématique locale (3.1) dans laquelle on remplace ds par sa valeur en fonction de $d\theta$ donnée par la formule (4) et on intègre par rapport à θ pour trouver :

$$f = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}$$

En utilisant le même changement de variable que précédemment afin de se ramener à la forme canonique de Legendre on obtient :

$$\frac{f}{L} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{I\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Pour calculer la portée de la poutre on procède de façon analogue en intégrant cette fois-ci la relation $dx = ds \sin \theta$. On trouve alors :

$$\frac{a}{L} = 2 \frac{J\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)}{I\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad J\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi} d\phi$$

L'avantage d'utiliser les intégrales sous forme canonique de Legendre et d'utiliser les différents paramètres adimensionnels (f/L et a/L) est de pouvoir réaliser un tableau (figure 43) en fonction des valeurs de l'angle α .

Angle (°)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
F/Fc	1.004	1.015	1.035	1.064	1.102	1.151	1.214	1.294	1.393	1.518	1.678	1.885	2.160	2.542	3.105	4.030	5.950
a/L	0,992	0,970	0,932	0,881	0,817	0,741	0,655	0,559	0,457	0,348	0,237	0,123	0,008	-0,106	-0,222	-0,340	-0,471
f/L	0.055	0.110	0.161	0.211	0.256	0.297	0.331	0.360	0.381	0.396	0.403	0.402	0.393	0.375	0.349	0.312	0.260

Figure 43 : Valeurs des paramètres caractéristiques

Avec l'ensemble de cet apport théorique nous pouvons maintenant établir l'effort nécessaire pour courber les éléments de notre maillage.

5.2.2. Détermination de l'effort de courbure

Au moyen de l'étude théorique précédente, nous allons effectuer la détermination de l'effort nécessaire pour courber un élément poutre de notre gridshell. Pour cela nous extrayons de notre modèle *Grasshopper* une courbe géodésique au niveau de la zone la plus courbée (figure 44).

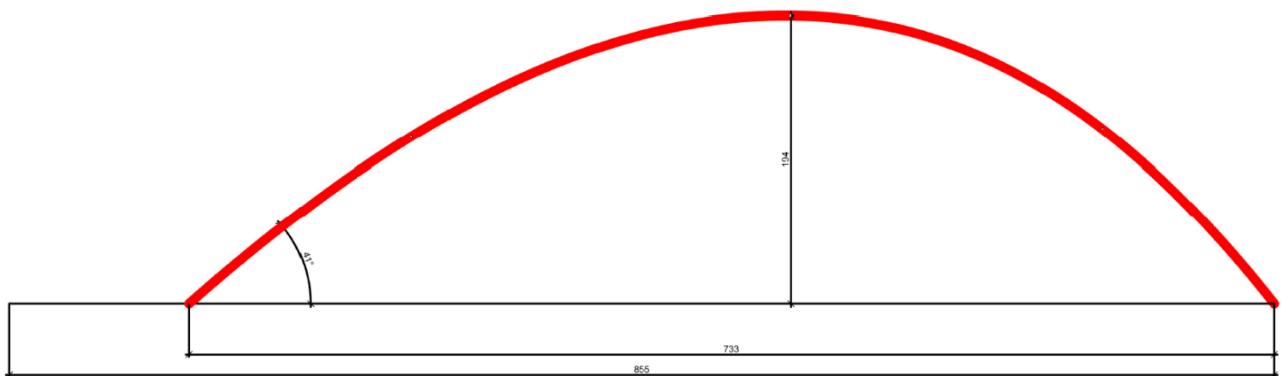


Figure 44 : Extrait d'une courbe géodésique issu de la grande coque

Nous obtenons $f=194\text{cm}$, $L=733\text{cm}$ et $\alpha=41^\circ$

À partir de ce moment-là, deux stratégies s'offrent à nous :

- La première consiste à négliger la raideur de flexion ce qui revient à considérer une inertie de section très faible. Cette stratégie a pour conséquence de rendre l'effort de déformation à appliquer très faible. En revanche elle induit une plus faible capacité résistante.
- La seconde stratégie consiste à maximiser la raideur en flexion et par conséquence l'inertie. Elle donne une plus grande résistance en flexion aux éléments. Elle est la plus adaptée étant donné que nous nous sommes éloignés du cas du gridshell funiculaire.

En utilisant les tableaux et formules précédents (figures 43 et 44) et en formulant l'hypothèse d'une section de bois de 70mm par 34mm pour un module d'Young de 11500MPa, on obtient donc une inertie de $2.29 \cdot 10^{-7}\text{m}^4$, une charge critique de $F_c=483\text{N}$ et la force à appliquer pour obtenir la courbure de 513N. Cette charge à appliquer reste raisonnable et correspond à une masse de 51kg.

5.3. DETERMINATION DE LA COURBURE ELASTIQUE MAXIMAL ADMISSIBLE ET LA COURBURE CRITIQUE

5.3.1. Courbure élastique maximale selon l'Eurocode

Nous réutiliserons une partie des formules utilisées précédemment, notamment :

$$M(x) = \frac{EI}{R(x)} (3)$$

À partir de la formule (3) et en suivant la démarche décrite par Truong [22], les éléments bois sont des poutres avec des propriétés géométriques. Nous définissons l'inertie I_y et I_z respectivement dans les deux axes de la poutre (axe faible et axe fort). À partir de ces inerties, on peut définir le module de section de poutre qui est dérivé de la relation physique suivante :

$$W_{el,y} = \frac{I_y}{b/2} \text{ et } w_{el,z} = \frac{I_z}{h/2}$$

L'Eurocode définit la contrainte de flexion maximale $f_{m,k}$ caractéristique. Il s'agit de la limite élastique que le matériau peut accepter. Au-delà de cette valeur, le matériau passe dans le domaine plastique. L'Eurocode 5 prescrit des coefficients de sécurité afin de minorer cette résistance en flexion. Ainsi, il tient compte de l'environnement dans lequel évolue cet élément bois comme l'humidité, si l'élément est à l'air libre, les durées d'application des charges etc. De manière usuelle, nous prendrons l'hypothèse que les coques seront couvertes par un revêtement et donc protégées de l'air extérieur. Par conséquent, d'après l'Eurocode, nous pouvons prendre une résistance en flexion de la poutre correspondant à cette formule :

$$f_{m,d} = f_{m,k} \times 0,61$$

Cette résistance en flexion de la poutre est directement liée au moment maximal élastique que peut accepter une poutre suivant l'axe y ou z. Elle est donnée par :

$$M_{el,y} = f_{m,d,y} W_{el,y}$$

En utilisant la formule (3) nous obtenons la courbure maximale élastique que peut prendre notre poutre :

Symbol	Désignation	Unité	D30	D35	D40	D50	D60	D70
$f_{m,k}$	Contrainte de flexion	N/mm ²	30	35	40	50	60	70
$f_{t,0,k}$	Contrainte de traction axiale	N/mm ²	18	21	24	30	36	42
$f_{t,90,k}$	Contrainte de traction perpendiculaire	N/mm ²	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
$f_{c,0,k}$	Contrainte de compression axiale	N/mm ²	23	25	26	29	32	34
$f_{c,90,k}$	Contrainte de compression perpendiculaire	N/mm ²	8,0	8,4	8,8	9,7	10,5	13,5
$f_{v,k}$	Contrainte de cisaillement	N/mm ²	3,0	3,4	3,8	4,6	5,3	6,0
$E_0,mean$	Module moyen axial	kN/mm ²	10	10	11	14	17	20
$E_0,05$	Module axial au 5 ^e pourcentile	kN/mm ²	8,0	8,7	9,4	11,8	14,3	16,8
$E_{90,mean}$	Module moyen transversal	kN/mm ²	0,64	0,69	0,75	0,93	1,13	1,33
$G,mean$	Module de cisaillement	kN/mm ²	0,60	0,65	0,70	0,88	1,06	1,25
ρ_k	Masse volumique caractéristique	kg/m ³	530	560	590	650	700	900
ρ_{mean}	Masse volumique moyenne	kg/m ³	640	670	700	780	840	1080

Figure 45 : Tableau des valeurs caractéristiques des bois massifs feuillus pris comme hypothèse dans l'Eurocode 5

$$R = \frac{M_{el,y}}{EI_y} = \frac{f_{m,d,y} \times 2I_y}{bEI_y} = \frac{2f_{m,d,y}}{bE}$$

En faisant l'application numérique, nous montrons qu'il faut un bois de classe D60 (figure 45) pour supporter les efforts en flexion induit par la courbure souhaitée.

Cette formule nous permet également de définir le rayon de courbure maximal élastique, pour lequel le matériau bois ne se comporte plus de manière élastique mais de manière plastique. Dans l'ingénierie de la construction bois, on cherche toujours à rester dans le domaine élastique du matériau car dans le domaine plastique, les déformations du matériau ne sont plus proportionnelles aux contraintes qui lui sont appliquées.

On trouve par le calcul la valeur maximale du rayon de courbure élastique :

$$R_{el} = 0,456m^{-1}$$

Cette valeur est à mettre directement en relation avec le rayon de courbure que nous avons trouvé dans la partie 5.1. Cela signifie que les éléments constitutifs de notre gridshell se trouvent bien dans le domaine plastique validant ainsi, à postériori, l'usage des formules précédentes.

La courbure élastique maximale est également à comparer avec la courbure critique.

5.3.2. Courbure critique

Nous déterminerons la courbure critique à partir de laquelle un phénomène de torsion peut se produire sur la poutre créant ainsi des instabilités. Ce phénomène de torsion apparaît par l'action d'un couple de forces agissant dans des plans parallèles. Il en résulte un moment agissant suivant l'axe de la poutre. Dans le cas des gridshells, ces phénomènes se produisent lors de l'assemblage du maillage au sol. En effet, lors de cette étape, des éléments poutres peuvent se « tordre » selon leur axe. Nous nous référerons aux travaux réalisés par Nicolas Montagne et Charles Haskell [12]. Le moment critique se définit par la formule suivante :

$$M_{cr,y} = \frac{C_1 \pi}{L} \sqrt{GJ \times EI_z}$$

Avec $C_1 = 1.35$ pour une poutre sur des supports articulés, G le module de cisaillement et J la constante de torsion. Pour une section de 34x70mm et un bois D60 on trouve que $GJ = 450Nm^2$. Donc :

$$M_{cr,y} = 1,3kN \cdot m$$

La longueur de flambement L correspond à l'intervalle entre deux éléments du maillage. Dans notre cas, il s'agit de la distance entre deux courbes géodésiques successives. On suppose qu'une courbe géodésique subit un effort en torsion de la même façon que pour la poutre de la figure 46. Les appuis représentés sur la figure 46 correspondent à des assemblages déjà réalisés. La force F est celle nécessaire pour réaliser l'assemblage suivant. Elle est à l'origine d'un moment dans la poutre.

De la même façon que précédemment, on peut relier ce moment de torsion à la courbure critique :

$$K_{cr,y} = \frac{M_{cr,y}}{EI_y} \text{ et } K_{cr,z} = \frac{M_{cr,z}}{EI_z}$$

Cette courbure critique théorique est à comparer avec la courbure élastique précédemment trouvée.

On trouve par application numérique que :

$$0,306 < 15,3 \Rightarrow R_{el,z} < K_{cr,z}$$

Ces valeurs numériques nous indiquent que notre élément de lattage dépassera la limite élastique avant de dépasser la courbure critique pour laquelle des phénomènes d'instabilité comme la torsion apparaîtront suivant l'axe faible.

5.3.3. Force de contrainte lors de l'assemblage

Le principe d'assemblage d'un gridshell consiste, nous l'avons vu, à l'assemblage au sol d'un maillage, puis par déformation de celui-ci en y appliquant les conditions aux limites définitives, le gridshell finit par prendre la forme voulue. Cependant lors de l'assemblage des lattes, celles-ci subissent des efforts importants. Nicolas Montagne et Charles Haskell [12] ont proposé une formule afin de définir cette force subie par une latte de bois :

$$F = \frac{EI_y R_y}{L}$$

Nicolas Montagne et Charles Haskell [12] rappellent également que lorsque la latte de bois est initialement inclinée dans la configuration plate du gridshell, l'inertie devient une fonction de l'angle d'inclinaison et des inerties suivant les deux axes.

Durant notre étude expérimentale, nous n'avons pas étudié la possibilité de « mettre à plat » notre



Figure 46 : Modèle de flexion sur trois appuis [12]

gridshell. Par conséquent, nous n'avons pas accès à la valeur exacte de L nécessaire à l'application de cette formule.

Nous considérerons donc par hypothèse que les efforts de contrainte d'assemblage du gridshell à plat sont faibles ce qui permet de négliger ces forces. Nous avons bien conscience de la limite de cette hypothèse étant donné que par la suite nous choisissons de maximiser les sections de nos éléments de lattage ce qui induit des efforts supplémentaires.

6. CALCUL DES EFFORTS DANS L'ENSEMBLE DU MAILLAGE

À présent nous allons faire une étude globale de notre structure soumise à son poids propre et à une charge climatique de vent. Nous utiliserons un logiciel de calcul, *RFEM* nous permettant de réaliser les différentes simulations physiques qui vont suivre .

6.1. HYPOTHESE ET CALCUL DU DEPLACEMENT DE LA STRUCTURE

Précédemment nous avons défini que notre maillage comportait un double lattage réalisé au moyen d'éléments bois dont les dimensions sont indiquées en millimètres sur la figure 47.

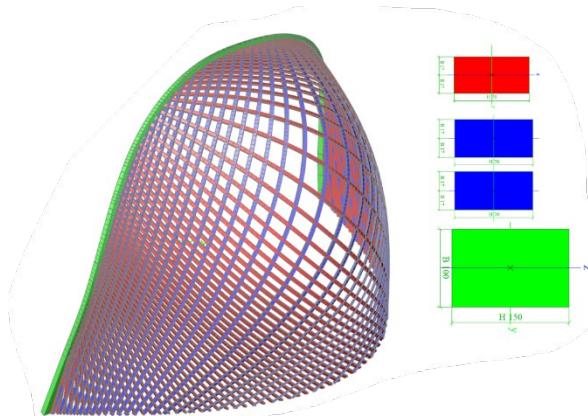


Figure 47 : Description du modèle de calcul

Nous avons fixé une dimension arbitraire de la poutre de rive représentée en vert. Pour rappel, cette poutre de rive fixe les conditions aux limites.

Une fois les dimensions géométriques définies, nous avons intégré les caractéristiques du matériau bois utilisé dans le logiciel de calcul. En l'occurrence, nous avons pris comme hypothèse un bois feuillu D60 avec les propriétés physiques définies par l'Eurocode (module d'Young, module de cisaillement, masse volumique, etc.). Le gridshell est prêt pour effectuer le calcul de déplacement. Nous avons pris

deux cas de figures qui nous ont semblé pertinents. Le premier correspond au déplacement de la structure soumise à son poids propre, figure 48, le second correspond au déplacement de la structure

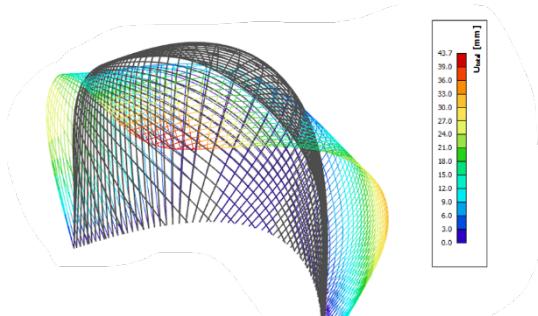


Figure 48 : Déplacement de la structure de la grande coque soumise au poids propre

soumise à un cas de charge dû au vent, figure 49.

Nous avons pris pour hypothèse que la structure subit un poids propre de 62kg/m^2 . Elle tient compte à la fois du poids des éléments bois du gridshell, de la bande de rive, du complexe d'isolation, du bardage extérieur et du revêtement intérieur. Les constituants de la coque sont un bardage en bardeaux de bois, une isolation en fibre de bois d'une dizaine de centimètres et d'un revêtement intérieur à base de chaux. Ils sont issus du projet architectural formulé initialement. Une fois ce devis de poids réalisé, nous nous sommes attachés à y appliquer un coefficient multiplicateur de 1.6. Il correspond à un coefficient de sécurité que l'on retrouve dans les Eurocodes pour le dimensionnement des structures suivant les états limites de service quasi-permanents (ELS). Ce coefficient multiplicateur porte la charge due au poids propre à environ 100kg/m^2 . Le dimensionnement à l'ELS permet de déterminer si la déformation de la structure induite par les charges qui lui sont appliquées, n'entrave pas le bon usage de l'ouvrage pour lequel il est fait. La simulation numérique nous permet d'obtenir le déplacement du gridshell soumis à son propre poids. Nous constatons que la déformation maximale se situe au sommet de la bande de rive.

Celle-ci fléchit de 43.7mm au maximum. De la même manière, nous simulons la déformation de la structure suivant un effort de vent à l'ELS. Nous avons pris pour hypothèse un effort de vent de 50kg/m^2 , appliqué suivant la direction opposée à x, (figure 50) avec un coefficient de pression $cp=0.8+0.3$. Cette valeur numérique de l'effort de vent inclut le coefficient multiplicateur de sécurité de l'ELS. La simulation numérique nous donne un déplacement maximal de 16.7mm.

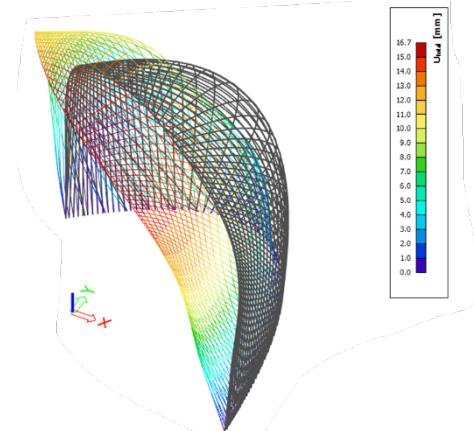


Figure 49 : Déplacement de la structure de la grande coque soumise à un effort de vent suivant -x

6.2. ANALYSE DES RESULTATS DU DEPLACEMENT DE LA STRUCTURE

À première vue, nous remarquons que le déplacement de la structure subissant son poids propre est supérieur au critère habituel de dimensionnement de la flèche à l'ELS. En effet, pour donner un ordre de grandeur, une poutre sur deux appuis est dimensionnée afin que la flèche ne dépasse pas le trois-centièmes de la portée de la poutre. Par analogie, notre structure devrait avoir une flèche limitée à 30mm pour une portée de 6m entre les deux appuis. Nous pourrions légitimement nous dire que la structure en gridshell soumise à des charges usuelles se déforme davantage que des structures plus simples. Cependant, en regardant attentivement le diagramme de déplacement de la structure, on peut constater que c'est la bande de rive qui se déforme de manière importante dans les deux cas de figures. Les différents exemples de gridshell que nous avons étudiés

dans la première partie de cet exposé, nous montrent que les contraintes se concentrent sur les délimitations du système du gridshell. C'est exactement le cas pour notre ouvrage. Le maillage bois réalise bien son office qui consiste à répartir les efforts au maximum dans la structure. La bande de rive est quant à elle soumise à des efforts en flexion importants qui sont pré-dimensionnents. Nous pouvons l'observer lorsqu'on fait apparaître le diagramme de contrainte en flexion

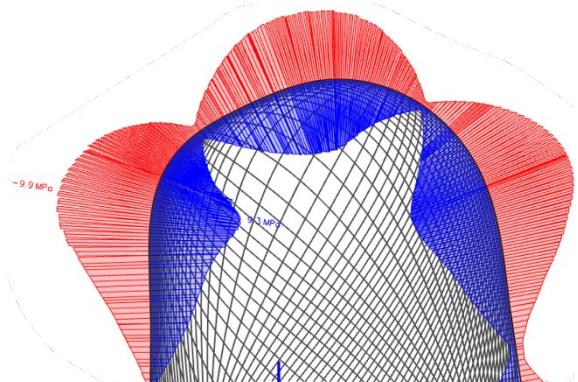


Figure 50 : Valeurs des contraintes en flexion suivant la bande de rive

dans la bande de rive (figure 50). On remarque que la valeur absolue de la contrainte est maximale à mi-hauteur de la bande de rive et atteint une valeur proche de 10MPa. L'apparition d'un moment dans la bande de rive vient du fait que celle-ci ne suit pas la forme d'un arc funiculaire et par conséquent ne minimise pas sa contribution. À titre de comparaison, les 10MPa de contrainte dans l'élément de rive représente 16.6% de la capacité de flexion d'un bois massif D60 caractéristique. Ce pourcentage peut paraître faible mais il faut penser que la capacité résistante caractéristique est diminuée par les facteurs liées à la dispersion du matériau γ_M , et à la durée de la charge k_{mod} . Dans notre cas on obtient donc :

$$f_{c,0,d} = f_{c,0,k} \frac{k_{mod}}{\gamma_M} \quad \text{AN : } f_{c,0,d} = 41,5 \text{ MPa}$$

Le nombre de 10MPa de contrainte correspond donc plutôt à 25% de la charge résistante admissible par le matériau. Pour que le bandeau de rive joue pleinement son rôle de contour fixe nous aurions

dû trouver un taux de travail de l'élément très faible. La section de la poutre de rive doit être augmentée afin d'accroître l'inertie et de valider l'hypothèse d'un contour de rive très rigide. Dans la suite de notre étude, nous considérerons que l'ensemble de la poutre de rive est un élément d'appui de la structure en gridshell. Cela revient à considérer que les déplacements de la bande de rive sont nuls. Nous pouvons ainsi nous concentrer sur le maillage en tant que tel.

6.3. ANALYSE DE LA REPARTITION DES EFFORTS DANS LE GRIDSHELL A L'ELS

Après avoir évoqué les limites du modèle de notre structure globale, nous allons nous intéresser seulement au gridshell à proprement dit. Les résultats sont présentés sur les figures ci-dessous :

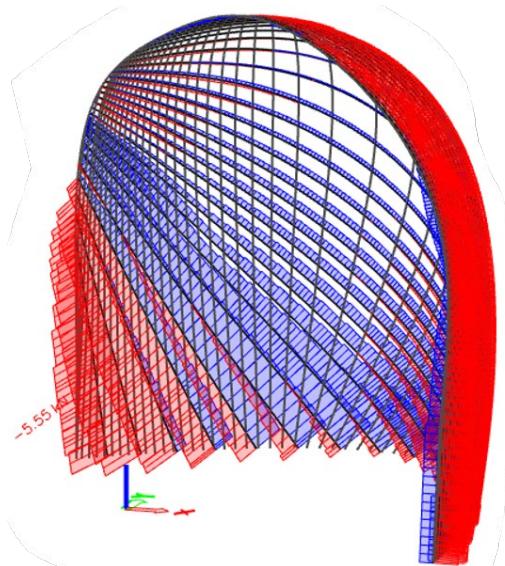


Figure 51 : Diagramme de l'effort normal sur le lattage double

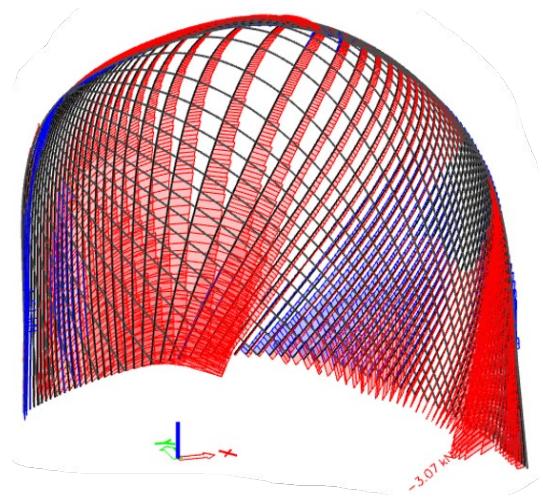


Figure 52 : Diagramme de l'effort normal sur le lattage simple

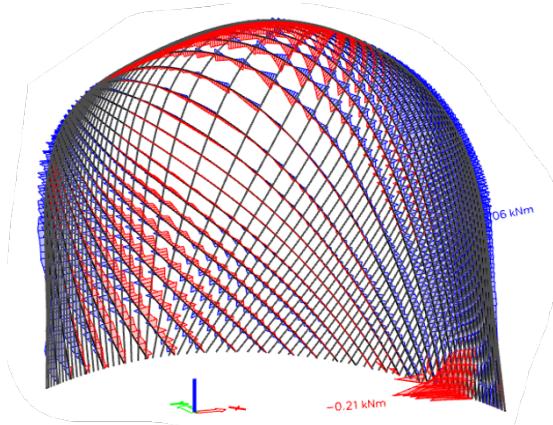


Figure 53 : Représentation du moment fléchissant sur le lattage double

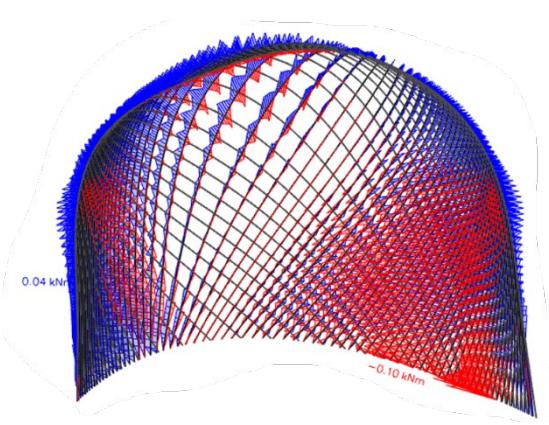


Figure 54 : Représentation du moment fléchissant sur le lattage simple

Il est important de constater que les efforts majoritairement transmis dans le gridshell sont bien des efforts de compression ou de traction. La présence de courbes géodésiques ne change donc pas la nature des efforts au sein de la structure. Ce premier résultat est donc conforme à la théorie des gridshells développée dans l'ouvrage de Schlaich [20] notamment.

Nous pouvons également noter la présence d'un moment fléchissant résiduel de faible valeur. Cela est dû au fait que la forme globale de notre structure ne suit pas la disposition inverse que prendraient des câbles soumis aux mêmes forces du poids propre et du vent. Cependant, le rapport de valeur entre le moment et les efforts de compression/traction permet de conclure que, dans notre cas, les efforts dûs au moment sont négligeables.

Du point de vue du dimensionnement aux Eurocodes, un effort N_{max} de 3.1kN dans une barre du simple lattage donne une contrainte de compression de :

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{3,1 \cdot 10^3}{34 \times 70} = 1,3 MPa$$

On peut considérer que la longueur de flambement d'un élément poutre constitutif de ce maillage est quasiment nulle étant donnée la proximité entre les espacements des assemblages sur les zones les plus sollicitées. Cela a pour conséquence de donner un coefficient réducteur de la résistance axiale proche de un. Par hypothèse, nous prendrons un coefficient de 0.8. À partir de là, nous pouvons estimer le taux de travail maximum de la structure globale :

$$T = \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} = \frac{1,3}{0,8 \times 22} = 7\%$$

Ce résultat signifie que le gridshell est sollicité à 7% de sa capacité résistante. Il est difficile de comparer cette valeur avec les exemples historiques par manque de données. Cependant, par analogie avec la construction bois de manière générale, le taux de travail maximal des éléments est généralement compris entre 50 et 70%. Cela signifie que notre structure pourrait être largement plus sollicitée ou bien que les dimensions des sections pourraient être diminuées. L'optimisation structurelle dans ce mémoire n'a pas été abordée.

CONCLUSION

Ce mémoire s'intéresse à la réalisation des gridshells pour des volumes prédéfinis. Nous nous sommes interrogés sur la possibilité de pouvoir optimiser leur conception au moyen des courbes géodésiques.

Dans un premier temps, nous avons fait une étude du fonctionnement général des structures en gridshell. Nous nous sommes aperçus que ces structures travaillent essentiellement suivant des efforts axiaux du fait de la propriété discontinue des volumes en gridshell. L'intérêt de ces structures réside principalement dans leurs coûts réduits en matière première et leurs capacités à franchir de grandes portées en comparaison des autres systèmes structurels existants.

Puis, nous nous sommes intéressés à quelques cas remarquables de réalisation de gridshells en architecture. Le gridshell de Mannheim est celui que nous avons le plus étudié étant donné qu'il reste aujourd'hui la plus grande réalisation d'un gridshell. Ses étapes de conception se sont découpées en deux parties. La première consistait à établir la forme générale du gridshell à partir de son modèle funiculaire, la seconde, à appliquer sur la forme obtenue un maillage suivant un réseau de Tchebychev au moyen de la méthode des compas. Cette méthode de réalisation « traditionnelle » a deux limites majeures. La première vient du fait que la méthode des filets constraint très fortement les formes accessibles. La seconde est due à la méthode des compas qui ne peut pas être utilisée sur tous les types de surfaces. De plus, elle est purement géométrique et ne tient pas compte de la physique du matériau utilisé. Nous avons donc cherché à démontrer que la méthodologie de réalisation des maillages issus de courbes géodésiques permettait de dépasser les limites de la méthode « traditionnelle ».

Nous avons montré que les courbes géodésiques n'étaient pas limitées par la courbure générale d'une surface et donc pouvaient la décrire. De plus, les propriétés des courbes géodésiques sont de nature à respecter la physique des matériaux. En effet, elles sont à la fois les courbes les moins courbées décrivant une surface mais elles sont également la plus courte distance reliant deux points de la surface. Ces propriétés nous ont permis, lors de la phase de dimensionnement des éléments, d'abord à l'échelle d'un constituant du maillage puis du gridshell dans son ensemble, de pouvoir augmenter les sections de bois utilisées en comparaison avec les gridshells existants. Ceci conjugué avec la possibilité de réaliser un double lattage strictement identique modulo un facteur

d'agrandissement, permet un assemblage particulier de notre structure assurant son contreventement. Ce double maillage renforce fortement l'inertie de la structure contrairement à un maillage de contreventement non parallèle, comme c'est le cas des exemples historiques. Tous ces avantages rendent l'utilisation des courbes géodésiques pertinentes dans la conception des gridshells.

Cependant les simulations physiques et calculs de dimensionnement qui nous ont permis d'argumenter sur la pertinence de cette utilisation sont difficilement comparables avec les gridshells historiques étudiés. Les morphologies, les dimensions ainsi que les constituants des coques sont assez différents entre les exemples et notre cas d'étude. Pour être plus rigoureux, nous aurions dû appliquer la méthode historique et la méthode issue des courbes géodésiques sur notre forme prédéfinie.

Nous pouvons tout de même conclure que l'usage des courbes géodésiques offre des résultats de résistance et déformation comparables voire même supérieurs aux exemples que nous avons pris, grâce au calcul du déplacement de la structures soumis aux charges de poids propre et de vent.

Les limites à l'utilisation des courbes géodésiques résident dans la difficulté à contrôler les espacements entre les mailles. Nous avons dû être attentifs à leurs répartitions du fait qu'elles s'éloignent ou se rapprochent à proximité d'une variation de courbure. Cette correction est apportée grâce à la programmation visuelle et la paramétrisation du modèle permises par *Grasshopper*.

Actuellement, des recherches théoriques et expérimentales sont toujours en cours concernant leur utilisation. Elles portent notamment sur la qualification de l'énergie contenue dans le maillage due aux forces de précontrainte de l'assemblage avec l'objectif de la diminuer afin de générer des formes parfaitement dépliables. De manière plus générale, plusieurs laboratoires en recherche théoriques et fondamentales tentent de déterminer une manière universelle et efficace de réaliser des maillages pour s'affranchir des difficultés des différentes méthodes. Dans l'état actuel des connaissances, cette question est toujours ouverte.

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Classification des typologies de structures (Schlaich [20]).....	11
Figure 2 : Répartition des efforts de cisaillement et normaux (Burkhardt 1978 [5])	12
Figure 3 : Répartition des efforts normaux dans un maillage (Burkhardt 1978 [5])	12
Figure 4 : Dôme de Buckminster Fuller	13
Figure 5 : Hall de Frei Otto à Mannheim	13
Figure 6 : Diagramme charge/déformation (Burkhardt 1978 [5])	14
Figure 7 : Vue extérieur de la structure en gridshell de Vyksa (1897)	15
Figure 8 : Vue intérieur du hall en 2007	15
Figure 9 : Plan de la halle de Mannheim avec les typologies de conditions aux limites	16
Figure 10 : Déformation d'un arc et d'un câble suivant une charge répartie [13]	17
Figure 11 : Maquette en filet inversé de la Sagrada Familia.....	18
Figure 12 : Filet inversé de la Sagrada Familia.....	18
Figure 13 : Maquette inversé de la Halle de Mannheim prise par photométrie.....	19
Figure 14 : Détail de la maquette inversé de la halle de Mannheim	19
Figure 15 : Photographie du chantier de construction du gridshell de Mannheim	20
Figure 16 : Représentation du système d'assemblage du gridshell de Mannheim.....	20
Figure 17 : Photographie du gridshell de Downland en construction [10]	21
Figure 18 : Vue intérieur du musée de Downland [10]	21
Figure 19 : Construction des lignes directrices par la méthode des compas [20]	23
Figure 20 : Elaboration du maillage de proche en proche [20].....	23
Figure 21 : Elaboration d'un maillage par la méthode des compas sur une sphère [15]	24
Figure 22 : Plan d'implantation des coques au sol au 1:200 ^{ème}	27
Figure 23 : Volumétrie des trois coques	27
Figure 24 : Diagramme module d'Young résistance ([6] Douthe 2007).....	32
Figure 25 : Diagramme ténacité / Module d'Young ([6] Douthe 2007)	33
Figure 26 : Diagramme module d'Young en fonction du contenu énergétique par unité de volume ([6] Douthe 2007)	34
Figure 27 : Schéma représentation des notations dans le cas d'une sphère [8].....	36
Figure 28: Espacement des géodésiques au niveau d'une singularité surfacique [18]	39
Figure 29 : Extrait programme Grasshopper	40
Figure 30 : Visualisation du maillage géodésique sur la grande coque.....	40
Figure 31 : Programme Grasshopper du maillage géodésique	41
Figure 32 : Extrait programme Grasshopper pour la génération d'une épaisseur au maillage.....	42
Figure 33 : Visualisation de l'écartement des coques.....	42
Figure 34 : Extrait programme Grasshopper permettant le repérage des intersections des géodésiques au niveau de la grande coque	43
Figure 35 : Zoom sur les segments représentant l'assemblage des deux lattages géodésiques.....	44
Figure 36: Plan de repérage des assemblages sur le lattage géodésique de la coque extérieure.	44
Figure 37 : Valeur de la charge critique nodale dans différent cas de figure du projet Elastica [15]	45
Figure 38 : Visualisation du double lattage sur la grande coque	45
Figure 39 : Assemblage permettant le contreventement.....	46
Figure 40 : Analyse du rayon de courbure minimal (à noter que le maillage visible est un maillage quelconque).....	47
Figure 41 : Valeurs extrêmales des courbures de la grande coque	48
Figure 42 : Schéma d'une poutre soumis à des forces horizontales [6].....	48
Figure 43 : Valeurs des paramètres caractéristiques.....	51
Figure 44 : Extrait d'une courbe géodésique issu de la grande coque	52
Figure 45 : Tableau des valeurs caractéristiques des bois massifs feuillus pris comme hypothèse dans l'Eurocode 5.....	53
Figure 46 : Modèle de flexion sur trois appuis [12]	55
Figure 47 : Description du modèle de calcul	56
Figure 48 : Déplacement de la structure de la grande coque soumise au poids propre	57
Figure 49 : Déplacement de la structure de la grande coque soumise à un effort de vent suivant -x	57
Figure 50 : Déplacement de la structure de la grande coque soumise à un effort de vent suivant -x	57
Figure 51 : Diagramme de l'effort normal sur le lattage double.....	59
Figure 52 : Diagramme de l'effort normal sur le lattage simple	59
Figure 54 : Représentation du moment fléchissant sur le lattage simple.....	59
Figure 53 : Représentation du moment fléchissant sur le lattage double	59

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.F. Ashby : *Materials Selection in Mechanical Design*, Dunod, 2ème édition, 2000
- [2] M.R. Barnes. *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. International journal of space structures*, 1999.
- [3] M. Beckh and R. Barthel. *Proceedings of the third international congress on construction history*, 2009.
- [4] L. Bouhaya, Ph.D. Thesis – *Optimisation structurelle des gridshells*. École doctorale science ingénierie et environnement, 2010.
- [5] B. Burkhardt. *IL13 Multihalle Mannheim*. 1978
- [6] C. Douthe. *Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites : Application à la conception des gridshells*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2007.
- [7] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes (Additamenta 1 De curvis elasticis & 2)*. Bousquet, Lausanne & Genève, 1744.
- [8] F. Faure, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, 2022
- [9] E. Happold et W. Liddel, *Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau*. The Structural Engineer, Vol. 53, No. 3, London, 1975, 99-135.
- [10] R. Harris, J. Romer, O. Kelly, and S. Johnson. *Design and construction of the downland gridshell*. Building research and information, 2003.
- [11] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math.* (1983)
- [12] : C. Haskell, N. Montagne, O. Baverel : *Generation of elastic geodesic gridshells with anisotropic cross sections*, 2021
- [13] O. Kelly, R. Harris, M. Dickson, and Rowe J. *Construction of the downland gridshell. Structural engineer*, 2001.
- [14] K. Linkwitz et H. J. Schek : *A new method of analysis of prestressed cable networks and its use to the roofs of the olympic games facilities in munich*. In 9th Congress of IABSE, 1972
- [15] M. Leyral, S. Ebode : *Elastica project : dynamic relaxation for post-formed elastic gridshells*, 2021
- [16] F. Otto : *IL10 Gitterschalen*. Institut für leichte Flächentragwerke. 1974
- [17] C. Roland, *The Work of Frei Otto*, Longman, 1970.
- [18] A. Roussel, chaine @ScienceClic sur youtube, 2019
- [19] H.-J. Schek : *The force density method for form-finding and computation of general networks. Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1974
- [20] J. Schlaich et R. Bergermann. *Leicht weit : Light structures*. 2003

- [21] Tchebychev, P.L. : *Sur la coupe des vêtements*, Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Paris, (1878).
- [22] J. Truong, C. Brousseau et A. Desbiens. *A method for measuring the bending and torsional stiffness distributions of alpine skis*. Procedia Engineering 2016
- [23] Wood Awards association US : <https://woodawards.com>